

Les routes vers le chaos en convection naturelle bidimensionnelle instationnaire dans une cavité carrée munie d'un obstacle adiabatique

**Léonide TONGAZARA^{1*}, Michel Aimé RANDRIAZANAMPARANY²
et Heriniaina Joeslin RABEMANANTSOA¹**

¹ *Université d'Antsiranana, Faculté des Sciences, Laboratoire de Mécanique des Fluides et Systèmes
Energétiques Appliqués (LMFSEA), BP 0, Antsiranana 201, Madagascar*

² *Université d'Antsiranana, Ecole Supérieure Polytechnique, BP 0, Antsiranana 201, Madagascar*

* Correspondance, courriel : toungazaraleonide@yahoo.fr

Résumé

Dans ce travail, nous proposons une étude numérique de la convection naturelle bidimensionnelle instationnaire qui se développe dans une enceinte fermée de section carrée contenant de l'air ($Pr = 0,71$) et renfermant un bloc carré, adiabatique, de petite taille. Deux parois opposées de l'enceinte sont portées à une température T_c et les deux autres à une température T_f telle que $T_c > T_f$. Les équations qui régissent la convection sont écrites en formulation « fonction de courant-vorticité » et intégrées à l'aide d'une méthode aux différences finies. L'étude est axée essentiellement sur la mise en évidence des routes vers le chaos que l'enceinte emprunte pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. Le transfert thermique convectif transitoire est déterminé pour différentes valeurs de ce nombre.

Mots-clés : *convection naturelle, point limite, cycle limite, chaos.*

Abstract

Roads towards chaos in non stationary two-dimensional natural convection in a square cavity provided with an adiabatic obstacle

In this work, we propose a numerical study of the non stationary two-dimensional convection natural which develops in a closed enclosure of square section filled with the air ($Pr = 0,71$) and containing a square block, adiabatic, of small size. Two opposite walls of the enclosure brought up to a temperature T_c and the two others at a temperature T_f such as $T_c > T_f$. The equations which govern the convection are written in formulation "function of current-vorticity" and integrated by using a finite difference method. The study is primarily centered on the description of the roads towards the chaos than the enclosure follows for various values of Rayleigh number. The convective transitory thermal transfer is determined for various values of Rayleigh.

Keywords : *natural convection, limit point, limit cycle, chaos.*

Nomenclature

Lettres latines

T	température adimensionnelle
(x,y)	coordonnées cartésiennes adimensionnelles
t	temps adimensionnel
u	vitesse adimensionnelle suivant l'axe x
v	vitesse adimensionnelle suivant l'axe y
Ra	nombre de Rayleigh
Pr	nombre de Prandtl
g	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$
a	hauteur de l'enceinte carrée, m

Lettres grecques

α	diffusivité thermique
ω	vorticité adimensionnelle
ψ	fonction de courant adimensionnelle
β	coefficient d'expansion thermique
ν	viscosité cinématique

Indices, exposants

c	chaud
f	froid
$*$	grandeurs avec dimension

1. Introduction

Depuis plusieurs années, le transfert thermique dans les cavités avec des parois différentiellement chauffées fait l'objet de nombreuses études. La convection naturelle a toujours été un mode de transfert attrayant dans l'ingénierie thermique. En effet, un grand nombre d'études des cavités carrées, rectangulaires, inclinées avec différentes conditions aux limites ont été intensivement considérées par des chercheurs [8 - 10]. L'amélioration du transfert thermique dans les cavités avec l'introduction des blocs au niveau des parois a été largement étudiée ces dernières années [1 - 7]. La recherche dans ce domaine couvre un champ très vaste car les applications concernées sont extrêmement variées. On peut citer les travaux de [1] sur la convection naturelle dans un canal horizontal comportant un nombre infini de blocs adiabatiques sur sa paroi inférieure, afin d'examiner principalement l'effet de la hauteur relative de ces blocs sur les champs de température et d'écoulement. Ils en ont déduit que les valeurs du nombre de Rayleigh engendrant le démarrage de la convection et celles caractérisant la transition vers des solutions oscillantes augmentent avec cette hauteur. [2] ont étudié numériquement la convection mixte dans une cavité inclinée de longueur finie, contenant des blocs adiabatiques. La cavité est chauffée par le bas de manière discrète par une température constante. L'influence du nombre de Rayleigh, de l'inclinaison de la cavité et de la hauteur relative des blocs sur le transfert de chaleur et la structure de l'écoulement a été examinée. Ils ont montré qu'il est possible de contrôler le transfert de chaleur à travers la paroi froide et la sortie du canal par des combinaisons adéquates de paramètres. [3] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte carrée contenant 9 à 64 obstacles solides pour un nombre de Prandtl de 1 et un nombre de Rayleigh allant de 10^5 à 10^8 . Ils ont observé qu'avec un faible nombre d'obstacles, l'écoulement se faisait essentiellement dans l'espace compris entre les parois et la première colonne d'obstacles alors qu'avec un plus grand nombre d'obstacles, le fluide circulait également dans les espaces entre eux. Le présent travail concerne l'étude numérique de la convection naturelle qui se développe au sein d'une cavité carrée munie d'un bloc adiabatique se trouvant en son centre. La longueur du bloc est prise égale à la dixième de celle de la cavité. Les parois de cette dernière sont isothermes. On va examiner l'effet de l'augmentation du paramètre de contrôle qui est le nombre de Rayleigh sur la structure d'écoulement et sur la route vers le chaos. Les solutions trouvées sont représentées par un attracteur dans un espace de phase.

2. Méthodologie

2-1. Formulation mathématique du problème

Nous considérons une enceinte carrée fermée remplie d'air ($Pr = 0,71$), munie en son centre d'un bloc adiabatique, dont l'inclinaison par rapport à l'horizontal est de 45° . Les deux parois opposées sont à la température T_c chaude et les deux autres à la température T_f froide. La **Figure 1** représente la géométrie de ce système.

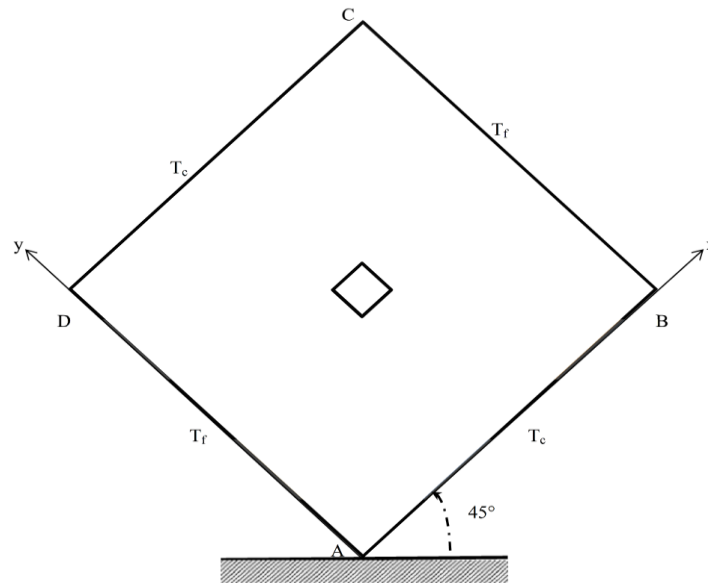


Figure 1 : Géométrie du problème considéré

Au sein de la cavité, les transferts thermiques sont gouvernés par les équations classiques de la convection naturelle. Nous adoptons alors les hypothèses simplificatrices suivantes. Les propriétés du fluide sont constantes à l'exception de la masse volumique dans le terme de la poussée, qui induit les forces de gravité dont les variations obéissent à l'approximation de Boussinesq. La dissipation visqueuse est négligeable dans l'équation de l'énergie. Le fluide est newtonien. Les échanges par rayonnement sont négligeables entre les parois. L'air est supposé être un gaz parfait. Sous ces hypothèses, les **Équations** adimensionnelles avec la formulation fonction de courant-vorticité s'écrivent comme suit :

- **Équation** de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (uT)}{\partial x} + \frac{\partial (vT)}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1)$$

- **Équation** de la vorticité :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial (u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial (v\omega)}{\partial y} = Pr \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + Pr Ra \left(\frac{\partial T}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y} \sin \theta \right) \quad (2)$$

- **Équation** de la fonction de courant :

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

- **Équations** liant la fonction de courant aux composantes de la vitesse :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

Conditions initiales :

A l'instant $t \leq t_0$, t_0 étant l'instant où les parois chaudes sont portées subitement à la température T_c , on a au sein de la cavité et sur toutes les parois : $\omega = 0$, $u = 0$, $v = 0$, $\psi = 0$ et $T = T_f$

Conditions aux limites :

A l'instant $t > t_0$, on applique aux parois de la cavité les conditions suivantes :

- sur les parois froides : $u = 0$, $v = 0$, $\psi = 0$, $T = T_f$ et $\omega = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$;
- sur les parois chaudes : $u = 0$, $v = 0$, $\psi = 0$, $T = T_c$ et $\omega = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$;
- sur les parois adiabatiques du bloc : $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ et $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ où n désigne la direction de la normale à l'élément de surface considérée (x ou y).

2-2. Résolution numérique

Les **Équations** de conservation décrivant l'écoulement et le transfert thermique sont résolues en approchant les dérivées partielles par des différences finies. Les dérivées temporelles sont approchées par une différence finie du premier ordre entre les instants $t - \Delta t$ et t (Δt étant le pas de temps). Les dérivées spatiales sont approchées par des différences finies centrées à travers le volume de contrôle. **L'Équation (3)** donnant la fonction de courant est résolue par une méthode itérative. Un coefficient de sur relaxation est utilisé pour accélérer la convergence. Cette convergence de la procédure itérative est atteinte lorsque le test suivant est vérifié à chaque pas de temps :

$$\left| \frac{\psi(i, j) - \psi^{\text{sup}}(i, j)}{\psi(i, j)} \right| \leq 10^{-6}$$

3. Résultats et discussion

3-1. Structure de la convection dans la cavité

L'écoulement dans la cavité est caractérisé par deux cellules contrarotatives (**Figure 2a**). Celle d'en bas tourne dans le sens horaire, celle d'en haut dans le sens trigonométrique. Pour des faibles valeurs du nombre de Rayleigh, la structure de l'écoulement présente une symétrie parfaite par rapport à la diagonale horizontale de la cavité. L'augmentation de la valeur du nombre de Rayleigh rompt cette symétrie. En effet, les deux cellules se subdivisent pour donner naissance à des petites cellules secondaires, aussi bien dans la

partie supérieure que dans la partie inférieure de l'enceinte. Les cellules de convection changent de taille, de manière alternative. Le gonflement des unes s'accompagne du rétrécissement des autres (*Figure 2b*). En examinant les isothermes, on peut remarquer la formation de couches limites thermiques au niveau des parois chaudes, qui se manifestent par des resserrements des lignes. En comparant les *Figures 3a et 3b* on constate que ces resserrements sont d'autant plus prononcés que le nombre de Rayleigh est élevé. Cela confirme que le transfert par convection s'intensifie dans la cavité.

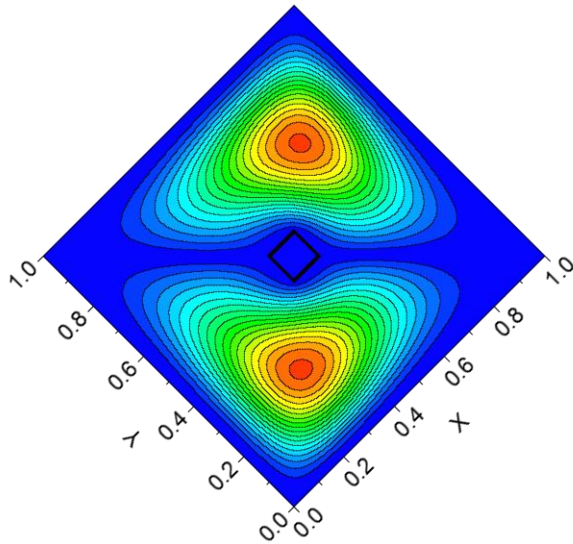


Figure 2a : *Isocourants pour $Ra = 10^4$*

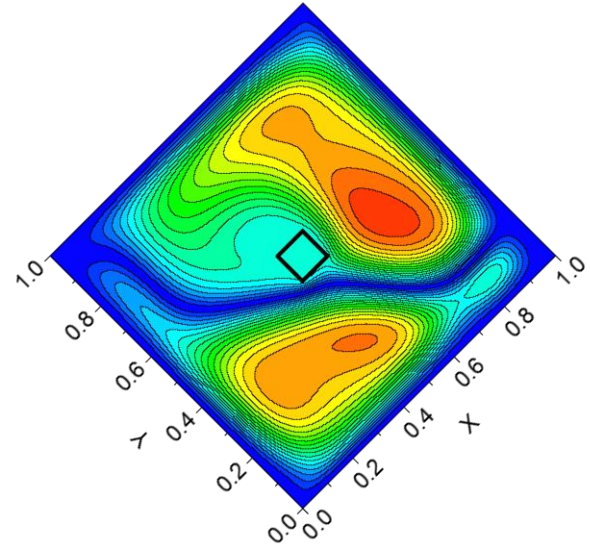


Figure 2b : *Isocourants pour $Ra = 9.10^5$*

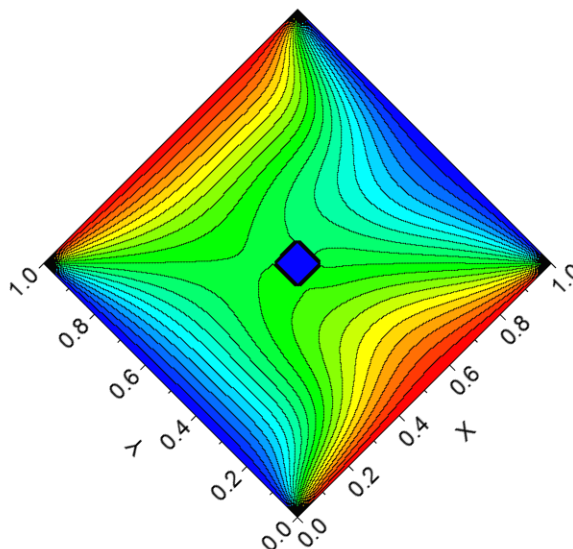


Figure 3a : *Isothermes pour $Ra = 10^4$*

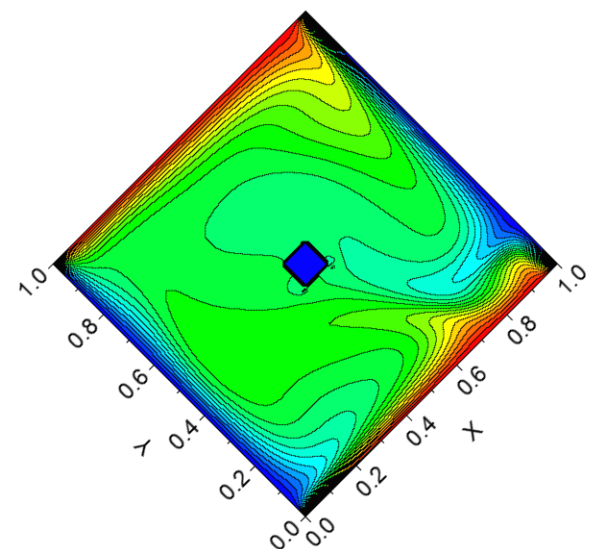


Figure 3b : *Isothermes pour $Ra = 9.10^5$*

3-2. Route vers le chaos

Pour des faibles valeurs du nombre de Rayleigh, les solutions tendent à grand temps vers un régime stationnaire stable. La convection stationnaire transite vers une convection dépendant du temps lorsque le nombre de Rayleigh croît. En effet, la convection stationnaire devient oscillante périodique, pseudo-périodique

et enfin chaotique. Pour un nombre de Rayleigh $Ra = 3,5 \cdot 10^4$, les solutions présentent une oscillation qui s'amortit afin de se stabiliser à une valeur constante (**Figure 4a**). La **Figure 4b** est un portrait de phase construit avec la température en un point de la cavité en appliquant la méthode du retard qui consiste à tracer $T(t)$ en fonction de $T(t - \Delta t)$. Son allure en spirale, partant de l'extérieur et aboutissant en un point à l'intérieur, indique que les solutions présentent dans un premier temps une oscillation qui s'amortit par la suite afin de se stabiliser à une valeur constante. On dit dans ce cas que l'attracteur est un point limite.

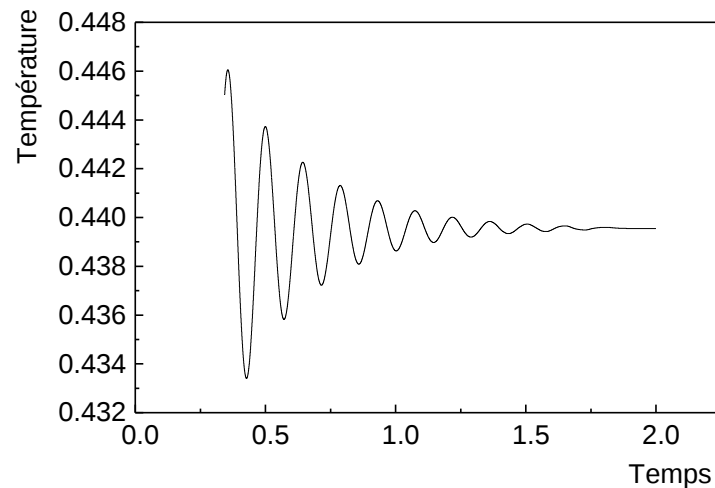


Figure 4a : Variation temporelle de la température, $Ra = 3,5 \cdot 10^4$

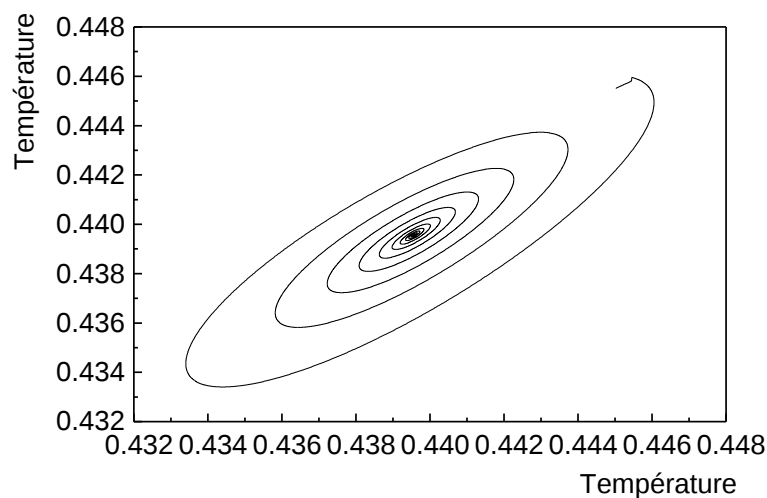


Figure 4b : Portrait de phase d'un point limite, $Ra = 3,5 \cdot 10^4$

Pour $Ra = 5 \cdot 10^4$, les signaux temporels des grandeurs ne se stabilisent plus mais évoluent dans le temps de manière oscillatoire périodique. La **Figure 5a** montre la variation sinusoïdale périodique de la température à l'intérieur de la cavité. Le portrait de phase, constitué d'une boucle fermée, confirme cette périodicité (**Figure 5b**). L'attracteur est un cycle limite. Le spectre d'amplitude issu de l'analyse de Fourier du signal temporel de la température au milieu de l'enceinte comporte un pic fondamental et quelques harmoniques de faible amplitude (**Figure 5c**).

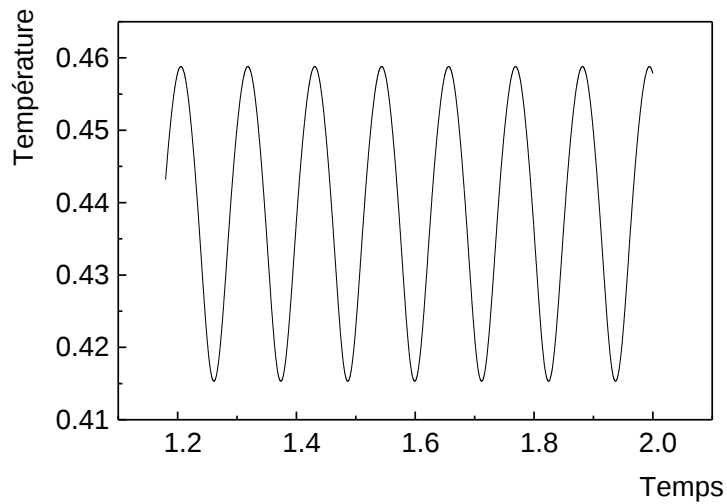


Figure 5a : *Variation temporelle de la température, $Ra = 5.10^4$*

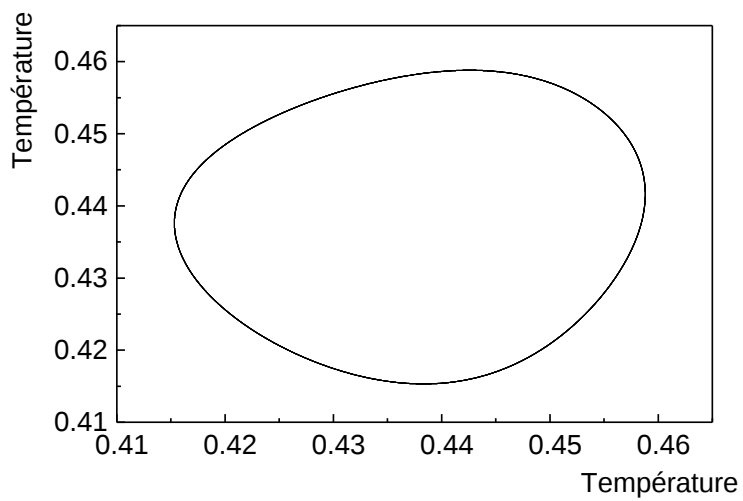


Figure 5b : *Portrait de phase d'un cycle limite, $Ra = 5.10^4$*

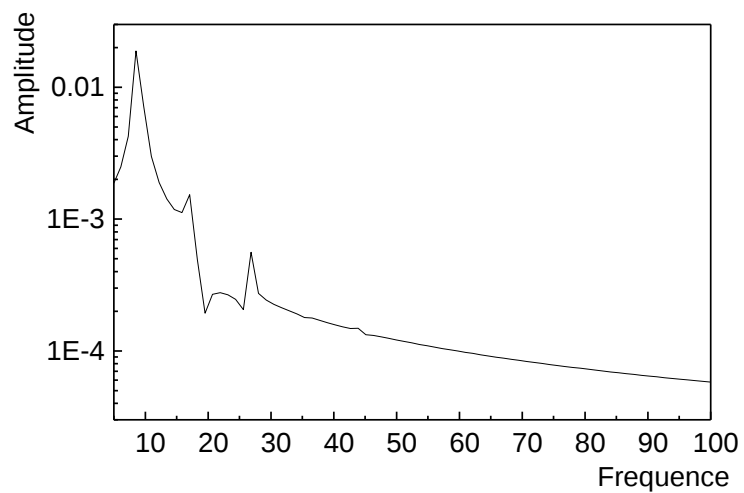


Figure 5c : *Spectre d'amplitude pour $Ra = 5.10^4$*

En augmentant davantage le nombre de Rayleigh, les résultats montrent que les variations temporelles des grandeurs ne sont plus sinusoïdales mais restent néanmoins périodiques (**Figure 6a**). Le portrait de phase représenté sur **la Figure 6b** est plus complexe que celui obtenu dans le cas précédent mais reste toujours cyclique. Le spectre d'amplitude comporte un pic fondamental et ses harmoniques qui apparaissent plus nettement que pour la valeur précédente de Ra (**Figure 6c**).

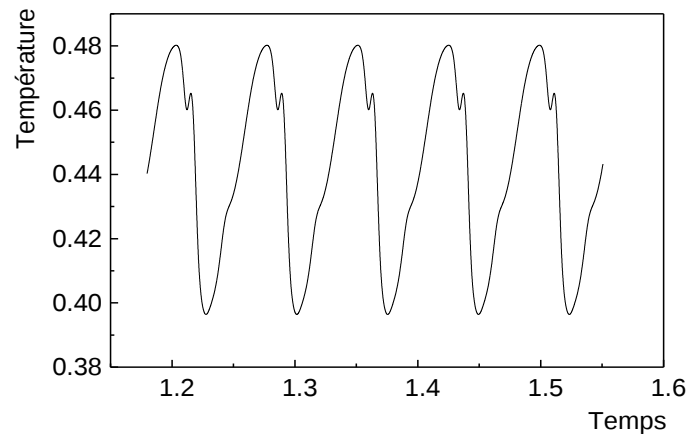


Figure 6a : Variation temporelle de la température, $Ra = 2.10^6$

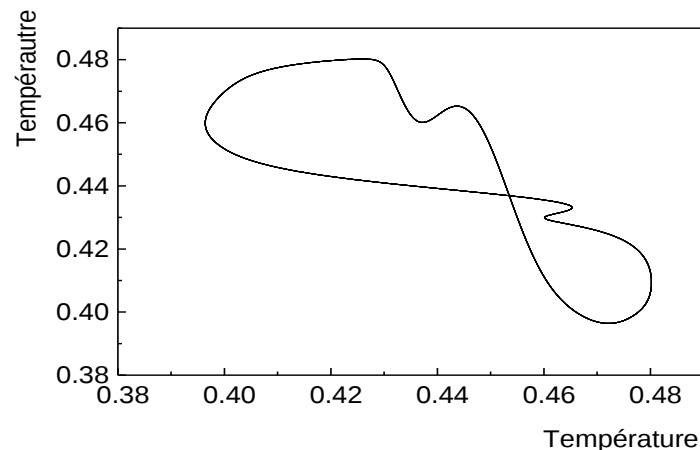


Figure 6b : Portrait de phase, $Ra = 2.10^6$

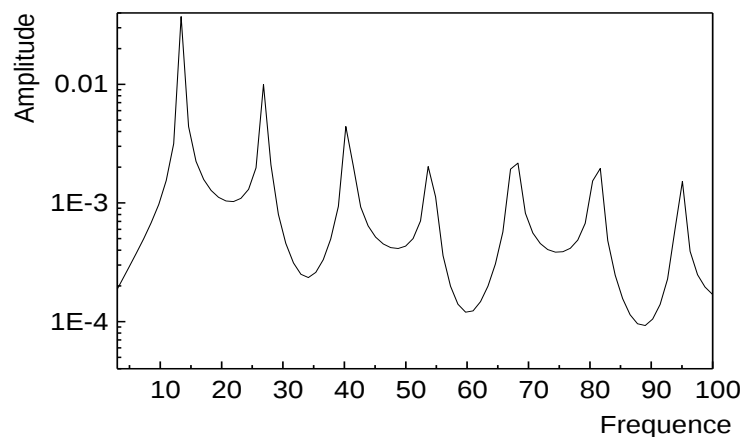


Figure 6c : Spectre d'amplitude $Ra = 2.10^6$

Ce comportement périodique persiste jusqu'à un nombre de Rayleigh $Ra = 8,8.10^5$ mais la trajectoire devient de plus en plus complexe au fur et à mesure que ce nombre augmente (**Figures 7a, Figure 7b et Figure 7c**).

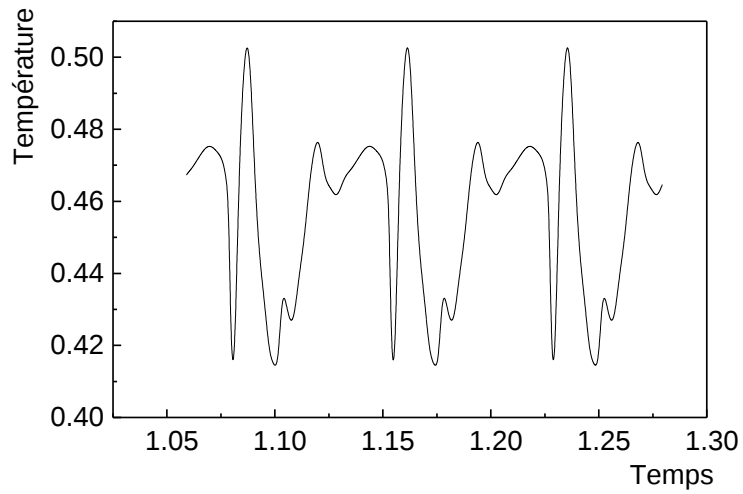


Figure 7a : *Variation temporelle de la température, $Ra = 8,8.10^5$*

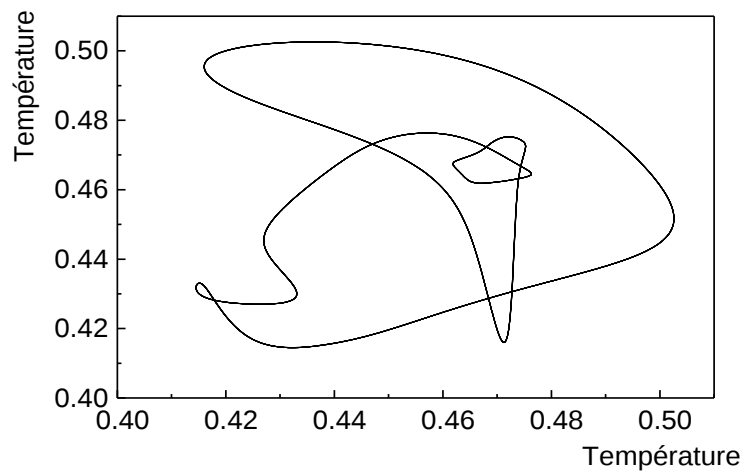


Figure 7b : *Portrait de phase, $Ra = 8,8.10^5$*

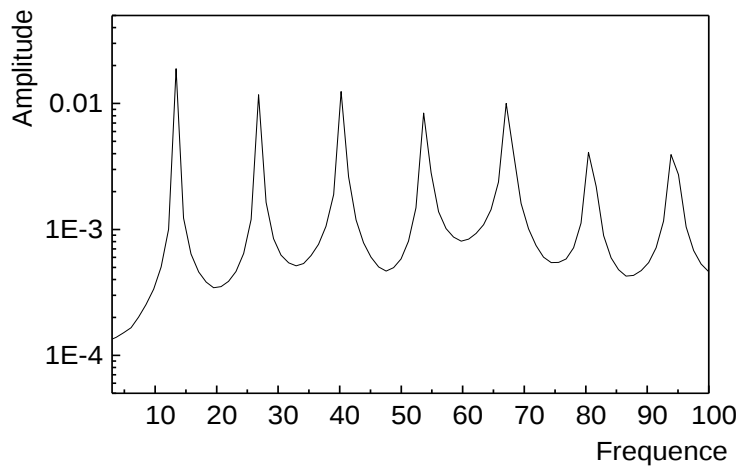


Figure 7c : *Spectre d'amplitude $Ra = 8,8.10^5$*

Un doublement de la période est observé à partir de $Ra = 9.10^5$. Les **Figures 8a à 8c** correspondant à $Ra = 9,1 \cdot 10^5$ illustrent ce phénomène. La variation temporelle de la température présente à peu près la même allure que précédemment (**Figure 8a**). Le portrait de phase se dédouble pour former deux boucles (**Figure 8b**) et un pic de faible amplitude, dont la fréquence est la moitié du pic le plus énergétique ainsi que ses multiples, apparaissent sur le spectre d'amplitude (**Figure 8c**).

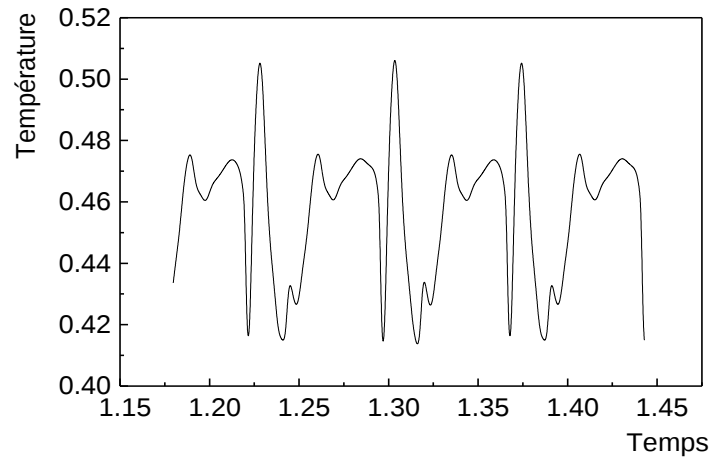


Figure 8a : Variation temporelle de la température, $Ra = 9,1.10^5$

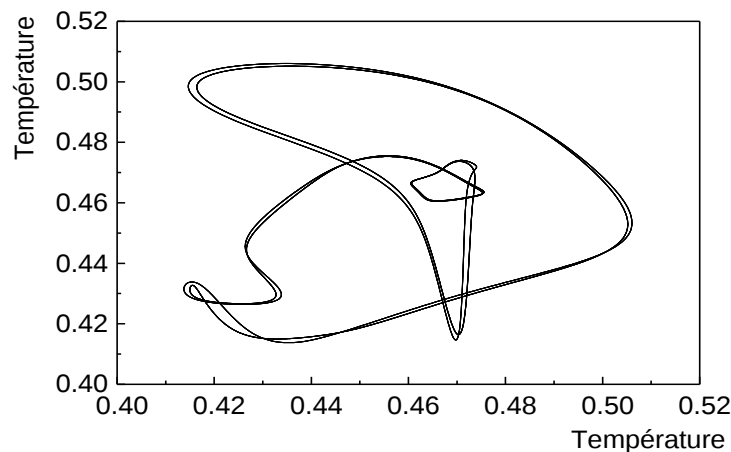


Figure 8b : Portrait de phase, $Ra = 9,1.10^5$

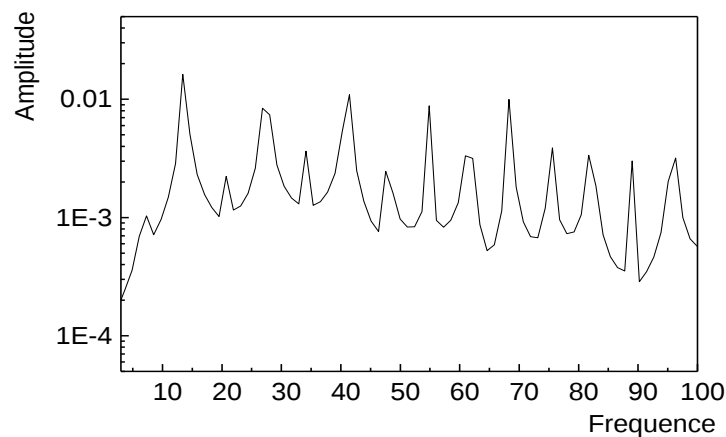


Figure 8c : Spectre d'amplitude $Ra = 9,1.10^5$

Les résultats obtenus qui ne sont pas tous représentés ici montrent que, en augmentant le nombre de Rayleigh, l'attracteur subit une série de doublements de période pour devenir chaotique à partir de $Ra = 9,5 \cdot 10^5$. La transition vers le chaos se fait donc via une cascade de bifurcations sous harmoniques. Pour $Ra = 9,5 \cdot 10^5$, les solutions commencent à perdre leur périodicité (**Figure 9a**). Le signal temporel de la **Figure 9a** montre des oscillations presque aussi régulières que celles de la **Figure 8a** mais présentant de temps à autre des fluctuations d'amplitude irrégulière. Un tel comportement erratique, est confirmé par le portrait de phase constitué de plusieurs trajectoires (**Figure 9b**) et du spectre d'amplitude présentant une allure déchiquetée (**Figure 9c**).

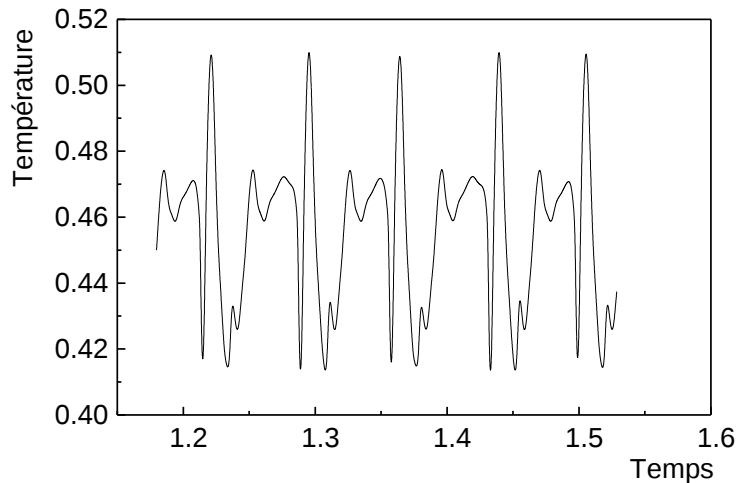


Figure 9a : *Variation temporelle de la température, $Ra = 9,5 \cdot 10^5$*

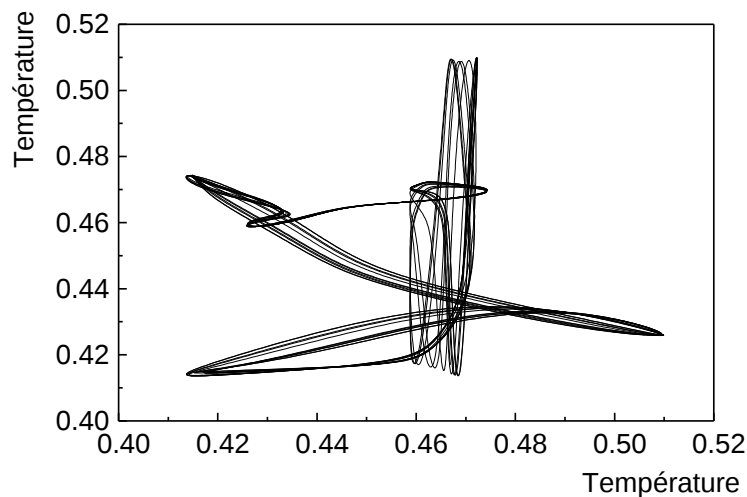


Figure 9b : *Portrait de phase du chaos pour $Ra = 9,5 \cdot 10^5$*

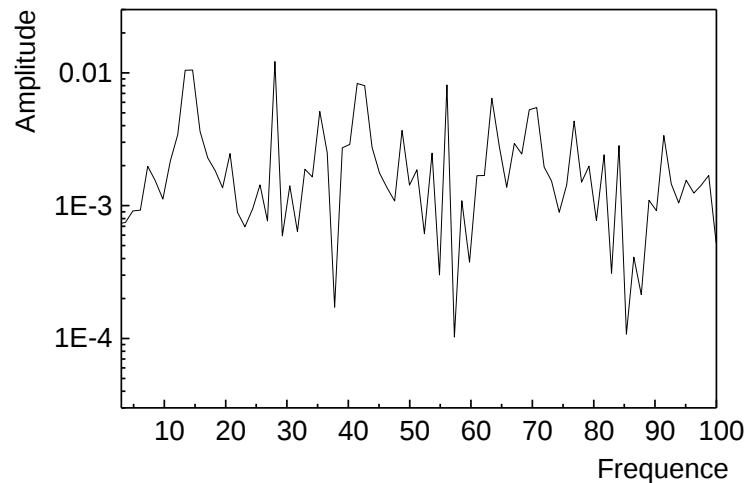


Figure 9c : Spectre d'amplitude déchantonné pour $Ra = 9,5.10^5$

4. Conclusion

L'étude numérique de la convection naturelle laminaire dans une enceinte carrée contenant un bloc adiabatique placé en son milieu, incliné d'un angle de 45° , porte essentiellement sur les influences du nombre de Rayleigh sur la structure d'écoulement et sur le transfert de chaleur. L'écoulement du fluide est constitué principalement de deux cellules convectives contrarotatives. Pour les faibles nombres de Rayleigh, la structure présente une symétrie par rapport au plan diagonal horizontal. L'augmentation de ce nombre entraîne l'apparition de petites cellules de recirculation en haut et en bas de la cavité carrée inclinée et rompt cette symétrie. L'étude montre aussi que l'écoulement dans l'enceinte subit des séquences de bifurcation de l'état stationnaire vers un état oscillatoire périodique, pour devenir chaotique après être passé par une cascade sous harmonique. La présence du bloc adiabatique accélère donc l'intensification du mouvement de convection dans la cavité qui est devenu chaotique pour $Ra = 9,5.10^5$ alors que sans bloc dans la cavité, [9] ont observé le chaos pour $Ra = 1,2.10^6$. Ces résultats sont intéressants dans les applications d'ingénierie pour pouvoir contrôler le chaos et surtout pour la conception des systèmes qui sont susceptibles d'être perturbés.

Références

- [1] - M. HASNAOUI, E. BILGEN, P. VASSEUR, *Numer. Heat Trans.*, 18 (1990) 463 - 482
- [2] - A. RAJI, M. HASNAOUI, Z. ZRIKEM, *Rev. Gen. Therm. Fr*, N°399 (1995) 202 - 209 p.
- [3] - A. A. MERRIKH, J. L. LAGE, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 48 (2005) 1361 - 1372
- [4] - J. R. LEE, I. S. PARK, *Nuclear Engineering and Technology*, 44 (3) (2012)
- [5] - M. A. MOUSSAOUI, M. JAMI, A. MEZRHAB, *Revue des Energies Renouvelables CER'07*, (2007) 249 - 253
- [6] - M. MOURABIT, H. ROUIJAA, E. A. SEMMA, M. E. ALAMI, M. NAJAM, *Revue des Energies Renouvelables*, 17 (4) (2014) 519 - 527
- [7] - D. MOUHTADI, Etude numérique de la convection naturelle engendrée par des blocs générant de la chaleur dans un canal horizontal et dans une géométrie cubique, Thèse de doctorat, Université de Cergy-Pontoise, France, (2012) 173 p.
- [8] - A. SKOUTA, M. A. RANDRIAZANAMPARANY, M. DAGUENET, *Int. J. Therm. Sci.*, 40 (2001) 352 - 365
- [9] - H. J. RABEMANANTSOA, M. A. RANDRIAZANAMPARANY, E. ALIDINA, *Afrique SCIENCE*, 11 (1) (2015) 12 - 26

- [10] - A. DJATOUTA, M. DOUHA, L. RAHMANI, B. MEBARKI, *Journal of Scientific Research*, Vol. 1, N°0 (2010)
- [11] - J. SALAT, Contribution à l'étude de la convection naturelle tridimensionnelle en cavité différentiellement chauffée, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France, (2004)
- [12] - A. IBRAHIM, D. SAURY, D. LEMONNIER, *Computers & Fluids*, 88 (2013) 115 - 125
- [13] - F. DJANNA, Convection naturelle turbulente en cavité différentiellement chauffée à grands nombres de Rayleigh : caractérisation expérimentale des écoulements et des transferts thermiques, étude numérique du couplage convection-rayonnement, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France, (2011)
- [14] - Y. VAROL, H. F. OZTOP, A. KOCA, F. OZGEN, *Appl. Therm. Eng.*, 29 (2009) 340 - 350
- [15] - M. MAHMOUDI, *Int. J. Thermal Sc.*, 50 (2011) 2161 - 2175
- [16] - B. CALGAGNI, F. MARSILI, M. PARONCINI, *Appl. Therm. Eng.*, 25 (2005) 2522 - 2531
- [17] - H. C. CHIN, W. M. YAN, *International Journal of Heat and Mass transfer*, 51 (2008) 1085 - 1094
- [18] - Y. VAROL ET AL, *International Communication in Heat and Mass Transfer*, 37 (2010) 182 - 191
- [19] - N. LAAROUSSI, Contribution à la simulation numérique des transferts de chaleur par conduction, rayonnement et convection thermo-solutales dans les cavités, Thèse de doctorat, Université de PARIS-EST, France, (2008)
- [20] - T. BASAK, S. ROY, A. R. BALAKRISHNAN, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49 (2006) 4525 - 4535 p.
- [21] - E. BILGEN, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 48 (2008) 3493 - 3505 p.
- [22] - M. A. DELAVAR, M. FARHADI, K. SEDIGHI, *International Journal of Thermal Sciences*, 15 (2011) 423 - 435 p.
- [23] - D. MOUHTADI, A. AMHAMID, M. HASNAOUI, R. BENNACER, *Numerical Heat Transfer*, part A, 59 (2011) 561 - 575
- [24] - M. BAKKAS, M. HASNAOUI, A. AMHAMID, *Energy Conversion and Management*, 51 (2010) 296 - 304
- [25] - S. NITIN, R. P. CHHABRA, *Int. J. Eng. Science*, 43 (2005) 707 - 720