Propriétés des suites du type "nlogn" au voisinage de plus l'infini

Servat NYANDWI* et Anaclet CONGERA

Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Université du Burundi, BP 2700 Bujumbura, Burundi

* Correspondance, courriel : *servat.nyandwi@ub.edu.bi*

Résumé

Ce travail porte sur l'étude des propriétés des suites comparables aux suites $(c * nlogn)_{n\geq 2}$ où « c » est un réel strictement positif. La connaissance de leurs propriétés contribue à résoudre des problèmes de la théorie des nombres et de cryptographie d'une part, et d'autre part, généralise les résultats établis par d'autres chercheurs. Ces problèmes traitent en grande partie la répartition des nombres premiers en progression arithmétique, un des thèmes fondamentaux de la théorie des nombres. C'est dans ce cadre qu'une étude des suites de terme général. $u_n = c * nlogn$ a été conduite. Pour atteindre cet objectif, nous avons fait appel aux résultats relatifs à la répartition et au théorème des nombres premiers. Notre étude a mis en lumière deux caractéristiques de ces suites : la dépendance ou la non apparition de la constante « c » dans certains cas. Pour le cas des nombres premiers en progression arithmétique, utilisés quelquefois en cryptographie, via la décomposition des entiers en produit des facteurs premiers, cette constante dépend de la progression arithmétique considérée. Des études numériques sont recommandées pour vérifier la véracité des résultats établis dans cet article.

Mots-clés : *nombres premiers, progression arithmétique, théorie des nombres, suites.*

Abstract

Properties of "nlogn" type suites in the neighborhood of plus infinity

This work deals with the study of the properties of suites comparable to suites $(c * \ nlogn)_{n\geq 2}$ where $c \in R^{+}_{0}$. The knowledge of their properties could help to solve some problems of number theory and cryptography on the one hand, and on the other hand, can find the results already established by other researchers. These problems concern largely the distribution prime numbers in arithmetic progression. It is in this context that a study of the consequences of general term $u_n = c * nlogn$ was conducted. Achieving this goal requires knowledge of some results concerning the distribution of prime numbers and the application of the prime number theorem. The results obtained highlighted two characteristics of these consequences : the dependence or non-appearance of the constant "c" in some cases. For the case of prime numbers in arithmetic progression, sometimes used in cryptography, via the decomposition of integers into product prime factors, this constant depends on the arithmetic progression considered. Numerical studies are recommended to verify the veracity of the results established in this article.

Keywords : *prime Numbers, arithmetic progression, number theory, suites.*

1. Introduction

LA fonction logarithme joue un rôle important en sciences surtout en mathématiques, en physique, en chimie et en économie. Néanmoins leur utilité en théorie des nombres est mal connue dans la plupart des Institutions universitaires, en particulier à celles du Burundi car les ressources humaines spécialisées dans ce domaine ne sont pas nombreux. Ce qui n'est pas le cas pour certains pays [1]. Cette branche de mathématique possède de nombreuses applications en cryptographie [2] et dans le système bancaire. Les fonctions considérées dans ce travail dépendent en grande partie des nombres premiers, nombres utilisés pour coder et décoder les messages [3]. La cryptographie est surtout utilisée dans les domaines militaire et bancaire. Cette branche utilise en partie les entiers dont leurs facteurs sont des nombres premiers ayant un grand nombre de chiffres qui sont très recherchés en télécommunication [4]. Par exemple, le plus grand nombre premier actuellement connu est formé d'environ 22 millions de chiffres [5]. Or, la difficulté de décoder un message est liée à la factorisation des nombres en facteurs premiers. C'est l'une des raisons pour laquelle la plupart de chercheurs en théorie des nombres s'acharnent à la recherche d'un plus grand nombre premier. Pour manipuler facilement ces nombres premiers, on groupe leurs chiffres en paquets de nombres d'une part. D'autre part, les opérations arithmétiques se font dans le système de congruence [6] comme dans le système binaire. Ce système est surtout utilisé en électronique et en informatique, via les fonctions booléennes. Le rôle des suites étudiées dans ce travail ne se limite pas seulement à présenter la contribution des nombres premiers dans les systèmes évoqués ci-haut mais nous verrons que ces objets mathématiques ont des particularités spécifiques à la théorie des nombres. Nous avons, par conséquent, jugé nécessaire de montrer, à partir des suites du type $u_n = nlogn$, le lien entre l'analyse et la théorie des nombres. En plus de cela, nous pensons que cet article pourrait contribuer à la maitrise des jeunes étudiants burundais de la théorie de l'information via l'utilisation des notions de la théorie des nombres.

Les suites de terme général $u_n = nlogn$ ont été utilisées par d'autres chercheurs [7, 8]. Ces chercheurs ont montré que les estimations des nombres premiers indexés par les nièmes nombres premiers dépendaient du nombre « $nlogn$ », d'une part, et d'autre part, ils ont étudié les propriétés de la série infinie $\sum_{p\geq 2}\frac{1}{plogp}$, où « p » désigne un nombre premier. Les résultats obtenus par ces chercheurs s'appuient en partie sur le théorème des nombres premiers. Ce théorème montre que le cardinal de l'ensemble des nombres premiers ne dépassant pas un réel x, noté $\pi(x)$, est de l'ordre de la fonction « $\frac{x}{logx}$ » lorsque x est un nombre très grand. Partant des propriétés spécifiques des nombres premiers en progression arithmétique [9] et des résultats relatifs aux suites de type « $nlogn$ » établis par d'autres chercheurs, on se pose la question si les éléments de l'ensemble des suites $(clogn)_{n\geq 2}$ possèdent les mêmes propriétés qu'aux suites « $nlogn$ ». Un exemple concret de ce modèle de suites est le nième nombre premier en progression arithmétique. La méthode utilisée pour estimer le nième nombre premier montre que le nième nombre premier en progression arithmétique se comporte comme les suites $(clogn)_{n\geq 2}$ où la constante « c » est donnée. Dans la suite, l'ensemble de telles suites sera noté par E_c. Les estimations que nous établissons seront caractérisés par les termes principaux sans préciser les termes d'erreur, une des caractéristiques de l'estimation des sommes partielles d'une série infinie [10]. En théorie des nombres, ces termes principaux caractérisent quelquefois l'infinité des nombres premiers [11]. Ainsi, notre objectif principal est d'étudier des propriétés spécifiques à ce type de suites en utilisant les résultats relatifs aux nombres premiers en progression arithmétique et aux estimations classiques de l'analyse.

2. Méthodes

2-1. Description du n^e nombre premier et de la fonction diviseur τ

Les suites étudiées dans cet article ont pour terme général $u_n = cnlogn$ où $n \geq 1$. Lorsque la constante prend la valeur 1. L'étude de ces suites est identique à celle de la fonction $f(x) = x \log x$ définie pour tout réel $x > 0$ qu'on peut écrire

$$x \log x = \int_1^x \log t dt - x*1 + 1*1 \ . \tag{1}$$

Ainsi, pour x fixé, le réel "$xlogx$" représente l'aire d'une surface donnée. Par contre, lorsque x est très grand, le théorème des nombres premiers ($\pi(x) \sim \frac{x}{logx}$) permet d'estimer le n^e nombre premier, noté p_n, par la quantité « $nlogn$ ». Plus précisément De la Vallée Poussin a montré que $p_n \approx n \log n$ [12] pour n « grand ». Le symbole « $\approx$ » signifie presque égal. Par exemple $p_{10000} \approx 30000 \log 10 = 92103$. En d'autres termes, puisque 2 est le premier nombre premier, 3 le deuxième, 5 le troisième, 7 le quatrième, 11 le cinquième, $\ldots$, le nombre premier qui occupe la 10000^e place est 92103. L'estimation De la Vallée Poussin donne un sens à la quantité $nlogn$ pour n « assez grand ». A part le n^e nombre premier, il y a d'autres suites ayant les propriétés semblables à celle de l'ensemble E_c. Par exemple, la moyenne des valeurs de la fonction diviseur est du type $nlogn$. Autrement- dit si pour tout entier $n \geq 1$, $\tau(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n, c'est-à-dire, le cardinal de l'ensemble $\{d; 0 < d \leq n; d / n\}$, on a alors $\sum_{d \leq n} \tau(d) \approx n \log n$ [13], en d'autres termes : compter tous les diviseurs d'entiers qui ne dépassent pas n revient à peu près à calculer « $n \log n$ ». Nous avons par exemple que $\sum_{d \leq 10000} \tau(d) \approx 92103$ puisque $10^3 \log 10^3 = 92103$. Après la présentation des suites à étudier, nous introduisons quelques notations que nous utiliserons tout au long de ce travail.

2-2. Notations

Pour $c \in]0, +\infty[$ r on rappelle que E_c désigne l'ensemble des suites strictement positives et croissantes u (de terme général u_n) définies sur les entiers strictement positifs et qui vérifient la propriété suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n}{n \log n} \right) = c \, .$$

Si n est un entier supérieur à 1, on note par $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n avec la convention $\omega(1) = 0$ et $\varphi(n)$ le cardinal de l'ensemble $\{0 < d \leq n; (d, n) = 1\}$. Si n, l et q sont trois entiers tels que $0 \leq l < q$, l et q premiers entre eux, $p_{n,q,l}$ désigne le n^e nombre premier de la forme $aq + l$ où a est un entier ≥ 1. Après ces notations, nous présentons quelques exemples de suites de l'ensemble E_c.

2-3. Exemples des éléments de l'ensemble E_c

Les nombres p_n et la fonction sommatoire $\sum_{d \leq n} \tau(d)$ sont estimés, lorsque n est grand, par la suite de terme général, $u_n = nlogn$, d'autres exemples de tels nombres existent dans la littérature. Par exemple, en utilisant le lemme d'intégration par parties, on peut montrer que $\sum_{k \leq n} logk \sim nlogn$ [12, 13]. De même si μ^2 est la fonction caractéristique des entiers sans facteur carré et c_0 la constante $\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^2 \left(1+\frac{2}{p}\right)$, où le produit est calculé sur tous les nombres premiers, on montre dans [12] que la suite $S_1(n) := \sum_{q \leq n} \mu^2(q) 2^{\omega(q)}$ vérifie la relation ci-après :

$$S_1(n) = c_0 n \log n + O(n) \tag{2}$$

qui est valable pour tout $n \geq 2$ et, où cette relation signifie : il existe une constante strictement positive c_1 telle que

$$\left|S_1(n) - c_0 n \log n\right| \leq c_1 n .$$

D'une manière générale, soit f est une fonction arithmétique, multiplicative et positive, c'est-à-dire que f est définie sur les entiers strictement positifs et vérifiant $f(ab) = f(a) f(b)$ dès que a et b sont premiers entre eux. Si cette fonction vérifie en plus la relation $f(n) = \sum_{n=ab} \tau(a) h(b)$, où h est une fonction arithmétique satisfaisant la condition

$$\sum_{n \geq 1} \frac{h(n)}{n} < \infty , \tag{3}$$

en utilisant les méthodes classiques de l'estimation des fonctions et si $S_2(n) = \sum_{q \leq n} f(q)$, on peut montrer que

$$S_2(n) = \left(\sum_{q \geq 1} \frac{h(q)}{q} \right) n \log n + O\left(\frac{n}{\log n} \right) \tag{4}$$

valable pour tout $n \geq 2$.

De la relation
$$\pi(n) \sim \frac{n}{logn} , \tag{5}$$
on établit que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{p_n}{n \log n} \right) = 1 . \tag{6}$$

Lorsqu'on remplace le n^e nombre premier par le n^e nombre premier en progression arithmétique, la relation (6) devient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{p_{n,q,l}}{n\log n}\right)=\varphi(q). \tag{7}$$

Dans ce travail, nous faisons plusieurs fois appel aux notations de ce paragraphe, du théorème des nombres premiers, des estimations classiques de l'analyse et du lemme d'intégration par parties [12]

2-4. Lemme d'intégration par parties

Soit $\{a_n; n\geq 1\}$ une suite de nombres complexes. On pose :

$$A(t)=\sum_{n\leq t} a_n \qquad (t>0) .$$

Alors, pour chaque fonction b de classe 1 sur l'intervalle $[1,x]$, on a

$$\sum_{1\leq n\leq x} a_n b(n) = A(x)b(x)-\int_1^x A(t)b'(t)\,dt \ . \tag{8}$$

La partie qui suit met en lumière les résultats principaux de ce travail.

3. Résultats

Dans ce travail, quatre théorèmes relatifs aux suites des nombres premiers en progression arithmétiques ont été établis. Le premier théorème concerne les suites qui ont les propriétés semblables à une suite de variables aléatoires suivant une loi uniforme. Le second théorème compare les termes des suites de l'ensemble E_C. Le troisième théorème étude les suites du même ensemble E_C via la moyenne harmonique. Le quatrième théorème traite la densité des nombres rationnels du type $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux nombres premiers entre eux. Ces théorèmes sont présentés dans le paragraphe suivant et leurs démonstrations feront l'objet d'un autre paragraphe.

3-1. Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de l'ensemble E_c. Pour $1\leq j\leq n$, posons $u_{n,j}:=\frac{u_j}{u_n}$,

$$X_n:=\frac{1}{n}\sum_{1\leq j\leq n} u_{n,j} \quad \text{et} \quad Y_n:=\frac{1}{n}\sum_{1\leq j\leq n} u_{n,j}^2 - X_n^2 .$$

Avec les notations ci-dessus, on a

$$\lim_{n\to+\infty} X_n=\frac{1}{2} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} Y_n=\frac{1}{12}. \tag{9}$$

Du théorème précédent, nous déduisons le théorème ci après.

3-2. Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de l'ensemble E_c. On suppose qu'il existe deux fonctions f et g définies sur N^* dans N^*vérifiant pour tout $n \in N^*$,

$$f(n) \geq g(n) \geq n.$$

On suppose en outre que pour toute fonction h définie sur N^*dans N^* qu'il existe une constante $c_2 \geq 0$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n)-g(n)}{h(n)}\right) = c_2. \qquad (10)$$

Sous les conditions précédentes, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{f(n)}}{u_{g(n)}}\right)^{1/h(n)} = 1. \qquad (11)$$

3-3. Théorème

Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est un sous ensemble de E_c, avec $u_1 = log2$, nous avons également

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{u_n}} = e^{\frac{1}{c}}.$$

Pour établir les théorèmes précédents, nous utilisons les inégalités reliant les moyennes arithmétique, harmonique et géométrique et la propriété des suites des éléments de l'ensembleE_c. Le quatrième théorème est le suivant.

3-4. Théorème

Pour tout $n \geq 2$, on pose $d_n = u_{n+1} - u_n$. On a alors

(i) $$\lim_{n\to+\infty}\inf\left(\frac{d_n}{\log n}\right) \leq c \leq \lim_{n\to+\infty}\sup\left(\frac{d_n}{\log n}\right).$$

(ii) L'ensemble des nombres rationnels de la forme $\frac{u}{v}$, où u et v sont deux termes premiers entre eux de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, est dense dans l'intervalle $[0,+\infty[$.

Nous établissons en premier lieu le *Théorème 3-1.*

- *Démonstration*

La preuve des relations (9) découle de la définition de la convergence d'une suite et des propriétés des éléments de l'ensemble E_c. Démontrons d'abord la première relation. Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{n\log n}\right) = c$ et puisque la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est un sous ensemble de E_c, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que si $n \geq n_0$, on ait

$$c-\varepsilon < \frac{u_n}{n\log n} < c+\varepsilon . \tag{12}$$

Par conséquent, il existe un réel $M > 0$ tel que

$$u_n X_n \geq \frac{M}{n} + \frac{c-\varepsilon}{n}\sum_{k=n_0}^{k=n} k\log k \geq \frac{M}{n} + \frac{c-\varepsilon}{n}\int_{n_0}^{n} t\log t dt$$

ou encore

$$u_n X_n \geq \frac{M}{n} + \frac{c-\varepsilon}{n}\left(\frac{n^2\log n - n_0^2\log n_0}{2} + \frac{n_0^2 - n^2}{4}\right).$$

Il existe un autre réel $M_1 > 0$ tel que

$$\frac{u_n X_n}{n\log n} \geq (c-\varepsilon)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\log n}\right) + \frac{M_1}{n}.$$

De la même façon, on montre également qu'il existe une constante $M_2 > 0$ vérifiant

$$\frac{u_n X_n}{n\log n} \leq \left(\frac{c+\varepsilon}{n^2\log n}\right)\left(\frac{(n+1)^2\log(n+1)}{2} - \frac{n+1}{4}\right) + \frac{M_2}{n^2\log n}.$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{\log(n+1)}{\log n} = 1,$$

on a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n X_n}{n\log n}\right) = \frac{c}{2}.$$

On obtient le premier résultat du théorème en utilisant la relation

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{n\log n}\right) = c.$$

Établissons maintenant la deuxième relation. D'après la première relations du théorème et l'égalité (10), pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux entiers $n_0, n_1 \geq 1$ tels que $\forall n \geq \max(n_0, n_1) = n_2$, on ait :

$$c-\varepsilon < \frac{u_n}{n\log n} < c+\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} - \varepsilon < X_n < \frac{1}{2} + \varepsilon .$$

Par conséquent,

$$Y_n > \frac{1}{n^3(\log n)^2(c+\varepsilon)^2}\left\{\sum_{q=1}^{n_2-1} u_q^2 + (c-\varepsilon)^2\sum_{q=n_2}^{n}(q\log q)^2\right\} - \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^2$$

ou encore

$$Y_n > \frac{1}{n^3(\log n)^2(c+\varepsilon)^2}\left\{\sum_{q=1}^{n_2-1} u_q^2 + (c-\varepsilon)^2\int_{n_2}^{n}(t\log t)^2\, dt\right\} - \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^2 \tag{13}$$

De la même façon, on peut montrer également que

$$Y_n < \frac{1}{n^3 (\log n)^2 (c+\varepsilon)^2} \left\{ \sum_{q=1}^{n_2 - 1} u_q^2 + (c+\varepsilon)^2 \int_{n_2}^{n} (t \log t)^2 \, dt \right\} - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2 \quad (14)$$

Or,

$$\int_{n_2}^{n} (t \log t)^2 \, dt = \frac{n^3}{27} \left\{ 9 (\log n)^2 - 6 \log n + 2 \right\} - \frac{n_2^2}{27} \left\{ 9 (\log n_2)^2 - 6 \log n_2 + 2 \right\} \quad (15)$$

Notons par a_n la suite qui minore la suite Y_n et par b_n celle qui la majore, voir les inégalités ***(13) et (14)***. En mettant en facteur l'expression $\frac{9n^3 l(ogn)^2}{27}$ déduite de la ***Relation (15)*** et en remplaçant l'intégrale par son expression de la ***Relation (15),*** on obtient par passage à la limite, l'inégalité suivante

$$\frac{(c-\varepsilon)^2}{3(c+\varepsilon)^2} - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right)^2 \leq \lim_{n \to +\infty} Y_n \leq \frac{(c-\varepsilon)^2}{3(c+\varepsilon)^2} - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2.$$

Cela conduit aux inégalités

$$\frac{1}{12} \leq \lim_{n \to +\infty} Y_n \leq \frac{1}{12}.$$

Cela montre que $\lim_{n \to +\infty} Y_n = \frac{1}{12}$.

Une conséquence relative aux nombres premiers en progression arithmétique du théorème précédent est le corollaire suivant.

3-4-1. Corollaire

Avec les notations des paragraphes précédents, on a

$$\text{(i)} \ \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n p_{n,q,l}} \sum_{1 \leq j \leq n} p_{j,q,l} \right) = \frac{1}{2} \quad (16)$$

$$\text{(ii)} \ \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{p^2_{j,q,l}}{p^2_{n,q,l}} - \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{p_{j,q,l}}{p_{n,q,l}} \right)^2 \right) = \frac{1}{12}. \quad (17)$$

- *Démonstration*

Comme la suite de terme général $p_{n,q,l}$ vérifie les hypothèses des éléments de l'ensemble E_c, avec $c = \varphi(q)$, on applique le ***Théorème 3-1*** en remplaçant la constante « c » par le nombre $\varphi(q)$.

Pour établir le ***Théorème 3-2***, nous aurons besoin du lemme suivant.

3-4-2. Lemme

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de l'ensemble E_c. On a pour tout entier positif i

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_{n+i}}{u_n} \right) = 1.$$

- *Démonstration*

Nous montrons d'abord que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Comme $(u_n)_{n \geq 1}$ est un élément de E_c, nous avons les équivalences suivantes

$$u_n \sim cnlogn \text{ et } u_{n+1} \sim c(n+1)log(n+1)$$

lorsque n tend vers l'infini où le symbole « $\sim$ » signifie $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{nlogn} = c$.

Or, on peut écrire

$$c(n+1)\log(n+1) = cn\left(1+\frac{1}{n}\right)\log n \left\{1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}.$$

Cela donne $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{c(n+1)\log(n+1)}{cn\log n}\right) = 1$ car $\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\} = 1$.

Les estimations précédentes impliquent $u_{n+1} \sim cnlogn$ lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent $u_{n+1} \sim u_n$. On montre maintenant la ***Relation (11)***. Pour tout entier i positif, on peut écrire : $\frac{u_{n+i}}{u_n} = \prod_{r=0}^{r=i-1} \frac{u_{n+r+1}}{u_{n+r}}$.

D'après la ***Relation***, $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_{n+i}}{u_n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\prod_{r=0}^{r=i-1} \frac{u_{n+r+1}}{u_{n+r}}\right) = 1.$$

Ce paragraphe est réservé à la démonstration du ***Théorème 3-2.***

- *Démonstration*

D'après le ***Lemme 3-4-2*** et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in N^*$ tel que si $n \geq n_1$, on ait $1 - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 + \varepsilon$.

Par conséquent,

$$(1-\varepsilon)^{f(n)-g(n)} < \frac{u_{f(n)}}{u_{g(n)}} = \frac{u_{f(n)} u_{f(n)-1} \dots u_{g(n)+2} u_{g(n)+1}}{u_{f(n)-1} u_{f(n)-2} \dots u_{g(n)+1} u_{g(n)}} < (1+\varepsilon)^{f(n)-g(n)} \tag{18}$$

D'après la relation (10), il existe un entier n_2 et un réel k tels que pour tout $n \geq n_2$,

$$\frac{f(n) - g(n)}{h(n)} < [k] + 1 \tag{19}$$

Dès ***Relations (18) et (19)***, on en déduit pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$ l'inégalité suivante :

$$\left(\frac{u_{f(n)}}{u_{g(n)}}\right)^{1/h(n)} < (1+\varepsilon)^{\left(\frac{f(n)-g(n)}{h(n)}\right)} < 1 + ([k]+1)M\varepsilon < 1+\varepsilon', \tag{20}$$

où on a posé $M = \max_{i \in \{1,2,\dots,[k]+1\}} \left(C^i_{[k]+1}\right)$ et $\varepsilon' = ([k]+1)M\varepsilon$.

Il reste à minorer la quantité $\left(\frac{u_{f(n)}}{u_{g(n)}}\right)^{1/h(n)}$. D'après la relation (10), quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_3 et pour tout $n \geq n_3$, $\frac{f(n)-g(n)}{h(n)} \geq c_2 - \varepsilon$. Il existe donc un réel positif k_1 tel que $\frac{f(n)-g(n)}{h(n)} \geq [k_1]$. La ***Relation (18)*** implique alors $\left(\frac{u_{f(n)}}{u_{g(n)}}\right)^{1/h(n)} > (1-\varepsilon)^{[k_1]}$.

On peut alors montrer comme pour la ***Relation (20)*** que

$$\left(\frac{u_{f(n)}}{u_{g(n)}}\right)^{1/h(n)} > 1-\varepsilon'. \tag{21}$$

La conclusion de la démonstration du ***Théorème 3-2*** découle des ***Relations (20) et (21)*** et de la définition de la limite d'une suite. Du ***Théorème 3-2***, nous déduisons les résultats suivants.

3-4-3. Corollaire

Si les fonctions f, g et h sont définies comme dans le ***Théorème 3-2***,
on a

(i) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{p_{f(n)}}{p_{g(n)}}\right)^{\frac{1}{h(n)}} = 1$; (ii) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{2n}}{u_n}\right)^{1/n} = 1$; (iii) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{n^2}}{u_{kn}}\right)^{1/n^2} = 1$

où k est un entier supérieur 1;

(iv) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{u_{n+i}+u_{n+j}}\right) = \frac{1}{2}$; (v) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{n+1}^2 - u_n^2}{2u_n^2}\right) = 0$ valables pour tous $i, j \geq 0$.

- *Démonstration*

On utilise les ***Relations (6), (16)*** et le ***Théorème 3-2*** pour établir les trois premiers points du ***Corollaire 3-4-3***.

Pour prouver les points (iv) du corollaire précédent, on écrit : $\frac{u_n}{u_{n+i}+u_{n+j}} = \frac{u_n}{u_{n+i}\left(1+\frac{u_{n+j}}{u_{n+i}}\right)}$ et on calcule la limite de deux expressions précédentes en supposant que $i \geq j$. Quand à la relation (v), on factoriser le numérateur et on suit le même raisonnement qu'à la relation précédente. Avant d'établir le ***Théorème 3-3***, nous rappelons le lemme de la moyenne harmonique.

3-4-4. Lemme

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n réels strictement positifs. On a

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n}.$$

Nous établissons maintenant le ***Théorème 3-3***.
D'après la caractérisation des suites de l'ensemble E_c, on a, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a la relation

$$\frac{1}{(c+\varepsilon)logn} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{(c-\varepsilon)logn}.$$

Si on pose $v_n = \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{u_n}}$. On a $v_n = \left(\prod_{k=1}^{n_0} u_k\right)^{\frac{1}{u_n}}\left(\prod_{k>n_0}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{u_n}}$.

Il existe donc une constante $c_1 > 0$ telle que

$$v_n \leq (c_1)^{\frac{1}{(c-\varepsilon)logn}}\left(\sum_{k=n_0}^{n}\frac{(c+\varepsilon)klogk}{n}\right)^{\frac{1}{(c-\varepsilon)logn}}.$$

De l'inégalité précédente et de la relation $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \leq n^2$, on en déduit que

$$v_n \leq (c_2 logn)^{\frac{1}{(c-\varepsilon)logn}}(n)^{\frac{1}{(c-\varepsilon)logn}}$$

ou encore

$$v_n \leq (c_2 logn)^{\frac{1}{(c-\varepsilon)logn}}\, e^{\frac{1}{c-\varepsilon}}\ . \tag{22}$$

De même, il existe une constante $c_3 > 0$ telle que $v_n \geq \left(\frac{c_3 n}{\sum_{k=n_0}^{n}\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{(c+\varepsilon)logn}}$.

Comme $\frac{c_3\, n}{\sum_{k=n_0}^{n}\frac{1}{k}} \geq \frac{c_3 n}{logn}$, nous avons $v_n \geq \left(\frac{c_3}{logn}\right)^{\frac{1}{(c+\varepsilon)logn}} e^{\frac{1}{c+\varepsilon}}$. (23)

Par passage à la limite, les inégalités (22) et (23) impliquent $\lim_{n\to+\infty} v_n = e^{\frac{1}{c}}$.
Du ***Théorème 3-3***, nous déduisons le corollaire suivant.

3-4-5. Corollaire

Nous avons $\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} p_{n,q,l}\right)^{\frac{1}{p_{n,q,l}}} = e^{\frac{1}{\varphi(q)}}$.

La démonstration de ce corollaire résulte du ***Théorème 3.3*** et de l'égalité $c = \varphi(q)$. Dans le paragraphe suivant, on suppose que les suites de l'ensemble E_c prennent des valeurs entières. Sous cette condition de plus, nous établissons le ***Théorème 3-4.***

En appliquant le *Lemme d'intégration par parties* avec $a_n = d_n$ et $b(t) = \frac{1}{\log t}$, $(t \geq 2)$, on peut écrire

$$\sum_{1<n\leq x} \frac{d_n}{\log n} = \frac{A(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{A(t)}{t(\log t)^2} dt = \frac{u_{[x]+1} + O(x)}{\log x},$$

où, on a utilisé la caractérisation des suites de E_c. On peut écrire de nouveau

$$A(t) = \sum_{1<n\leq t} d_n = u_{[t]+1} - u_2 \sim ctlogt. \tag{24}$$

De plus,

$$\int_2^x \frac{1}{logt} dt \sim \frac{x}{logx}$$

pour x assez grand, avec $[x]$ désignant le plus petit entier vérifiant $[x] \leq x < [x] + 1$.

Comme

$$u_{[x]+1} \sim c\,([x]+1)log([x]+1) \sim cxlogx,$$ on conclut que

$$\sum_{1<n\leq\leq x} \frac{d_n}{logn} \sim cx. \tag{25}$$

Puisque

$$\inf_{1<n\leq x}\left(\frac{d_n}{\log n}\right) \leq \frac{d_n}{\log n} \leq \sup_{1<n\leq x}\left(\frac{d_n}{\log n}\right),$$

on a

$$\inf_{1<n\leq x}\left(\frac{d_n}{\log n}\right)\sum_{1<n\leq x} 1 \leq \sum_{1<n\leq x} \frac{d_n}{\log n} \leq \sup_{1<n\leq x}\left(\frac{d_n}{\log n}\right)\sum_{1<n\leq x} 1.$$

On peut encore écrire

$$\inf_{1<n\leq x}\left(\frac{d_n}{\log n}\right)\{[x]-1\} \leq \sum_{1<n\leq x} \frac{d_n}{\log n} \leq \sup_{1<n\leq x}\left(\frac{d_n}{\log n}\right)[x].$$

En faisant appel à la ***Relation (25)*** et par passage à la limite, l'inégalité précédente devient

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{1<n\leq x}\left(\frac{d_n}{\log n}\right) \leq c \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{1<n\leq x}\left(\frac{d_n}{\log n}\right).$$

Pour établir la deuxième partie du ***Théorème 3-4***, on construit une suite d'entiers $A_n\{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ des éléments de l'ensemble E_c croissante au sens large tel que, pour tout réel $\alpha > 0$, $u_{n_j} \sim c\alpha j$ lorsque j tend vers l'infini.

En effet, pour tout $j \geq 2$, posons $n_j = \left[\frac{\alpha j}{\log j}\right]$. De la définition de l'entier n_j, on a

$n_j = \frac{\alpha j}{log j}\left\{1 - \frac{log j}{\alpha j}\left\{\frac{\alpha j}{log j}\right\}\right\}$ où $\{t\}$ désigne la partie décimale d'un nombre t. Lorsque j est assez grand, on conclut que $log(n_j) \sim log j$.

De la caractérisation des suites de E_c, on en déduit les ***Relations (26)***.

$$u_{n_j} \sim c n_j log(n_j) \sim c n_j log j \sim c\alpha j \tag{26}$$

lorsque j tend vers l'infini.

Pour compléter la preuve du théorème précédent, on pose $m_j = \left[\frac{j}{\log j}\right]$.

Du ***Lemme 3-4-2*** et des ***Relations (26)***, on déduit que

$$\lim_{j \to +\infty}\left(\frac{u_{n_j}}{u_{m_j}}\right) = \alpha \; . \tag{27}$$

Cela termine la démonstration de la deuxième partie du ***Théorème 3-4.***

3-4-6. Corollaire

L'ensemble des rationnels $\frac{a}{b}$, où a et b sont deux nombres premiers entre eux, est dense dans l'intervalle. $[0, +\infty[$.

- *Démonstration*

Soit α un réel strictement positif. Considérons les nombres premiers p_{n_j} et p_{m_j}, où $n_j = \left[\frac{\alpha j}{\log j}\right]$ et $m_j = \left[\frac{j}{\log j}\right]$. D'après la ***Relation (27)***, on conclut que $\lim_{j \to +\infty}\left(\frac{p_{n_j}}{p_{m_j}}\right) = \alpha$

Cela montre la densité des rationnels de la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont deux nombres premiers entre eux. Le paragraphe suivant est réservé à la discussion des résultats obtenus dans cette étude.

4. Discussion

Les résultats de cette étude montrent que la constante qui caractérise l'ensemble E_c apparait dans certaines estimations. Mais ces estimations coïncident avec celles des autres chercheurs lorsqu'on remplace la constante par un [14, 15]. Ainsi, le terme principal de nos estimations dépend ou non de la constante qui caractérise l'ensemble E_c. Dans ce travail, nous avons montré que certaines sous suites des éléments de l'ensemble E_c suivent approximativement la loi uniforme. Cette propriété est peut-être due à la définition de ces sous suites construites comme des moyennes arithmétiques des certaines séries des nombres. Bien que le terme principal est l'une des caractéristiques de certaines estimations, le terme d'erreur montre l'erreur commise en remplaçant une suite par son terme principal. Dans certains travaux, on étudie simultanément les deux termes [12, 13]. La méthode utilisée dans ce travail (méthode élémentaire) ne pourrait pas fournir les résultats contenant le terme principal et le terme d'erreur. Pour le cas des nombres premiers en progression arithmétique, nos résultats dépendent de la fonction phi d'Euler (φ) [16] qui définit l'ordre du groupe des unités de l'anneau $Z/_{qZ}$ [17]. En général, ces nombres interviennent dans la localisation des zéros de la fonction zêta de Riemann en vue de vérifier l'hypothèse de Riemann [18 - 20]. Le lien entre les zéros de cette fonction et les nombres premiers est observé grâce l'estimation de la fonction sommatoire de la fonction de Von Mongoldt [12, 13] via le théorème de Perron [12, 13] et celui des résidus. Dans ce travail, nous n'avons pas vérifié les relations des suites faisant partie de notre étude avec les domaines cités, cela pourrait constituer un autre thème à étudier ultérieurement. L'implication des nombres premiers en télécommunication est un sujet traité actuellement par plusieurs auteurs. Ces derniers s'intéressent principalement dans la recherche du plus grand nombres premiers composés par au moins des chiffres d'ordre de vingt millions [5]. Or les nombres premiers interviennent dans la factorisation des entiers. Cette factorisation peut se faire en groupant séparément les petits et les grands facteurs premiers ou les facteurs premiers en progressions arithmétique [21]. Ainsi, en étudiant cette dernière catégorie des nombres, on contribue indirectement à la cratérisation de certains sous ensembles de l'ensemble des nombres positifs.

C'est un cas particulier de la détermination des densités de certains sous ensembles des nombres [12, 13]. Ce cas est comparable au ***Théorème 3-4***. En général, l'étude des nombres premiers peut se faire d'une façon élémentaire (combinaison d'arithmétique et d'algèbre), analytique (combinaison d'analyse et des nombres complexes) et d'une façon probabiliste (combinaison de l'arithmétique et des probabilités) [12]. D'autres méthodes non classiques existent, par exemple dans [23], M. SGHIAR établit des résultats relatifs aux nombres premiers via la théorie de la mécanique quantique. Ce même chercheur, Jean-Louis Nicolas et al. ont établi des résultats de théorie des nombres via la fonction zêta de Riemann [18 - 20]. Les méthodes utilisées ici sont élémentaires et ont consisté à la recherche des parties principales des estimations des suites de l'ensembleE_c. D'une façon générale, les différentes méthodes qu'on utilise pour estimer les suites des nombres fournissent le même terme général, ce sont les termes d'erreur qui diffèrent quelquefois. Cette propriété est valable pour notre travail. En effet si la constante prend la valeur une, nous obtenons les résultats des autres chercheurs. Un résultat d'estimation est meilleur par rapport aux autres s'elle fournit un terme d'erreur négligeable qui tend en général lorsque les variables utilisées sont très grandes. Le plus souvent la méthode élémentaire met en évidence des termes d'erreur grossiers [12, 13]. C'est l'une des raisons pour lesquelles elle fournit surtout le terme principal contrairement aux méthodes analytiques [12, 13]. Ainsi, notre étude montre le lien entre l'arithmétique et l'algèbre classique. En outre, les progressions arithmétiques interviennent dans l'étude des morphismes des groupes $[17]$, appelés « caractères ». Par cette étude, nous avons établi beaucoup des propriétés caractérisant les suites du type $(cnlogn)_{n\geq 2}$ et nous avons montré qu'il ya un lien entre nos résultats et ceux des autres chercheurs. Néanmoins, on peut se poser la question si les méthodes utilisées ici pourraient être utilisées pour étudier d'autres catégories des nombres premiers [12, 13].

5. Conclusion

L'étude des propriétés des suites de l'ensemble E_c a montré l'influence de la constante « c », une des caractéristiques de ces suites, sur certains résultats obtenus. Cette influence apparait sur les termes principaux des estimations réalisées. Les résultats qui ne dépendent pas de cette constante concernent les sous suites construites sous forme des rationnels. Lorsqu'on remplace la constante par un, nous obtenus les résultats des autres auteurs. En outre, lorsqu'on substitue les éléments de l'ensemble E_c par les nombres premiers en progression arithmétique, les résultats obtenus mettent en évidence une des caractéristiques des groupes, à savoir l'ordre d'un groupe fini. Nous avons également montré que l'ensemble des rationnels dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres premiers entre eux est un sous ensemble dense de l'ensemble des nombres réels. Cette densité était connu pour touts les nombres rationnels. Dans ce travail, nous avons établi que la série dont le terme général est le logarithme de l'un des termes des suites étudiées gardait le caractère des éléments de l'ensembleE_c. D'une façon générale, nos résultats généralisent ou coïncident avec ceux des autres chercheurs.

Références

[1] - F. BRECHENMACHER, « *Self-Portraits with Evariste Galois* », *Revue d'histoire des mathématiques*, France, Vol. 17 (2) (2011) 271 - 369 p.

[2] - V. LYUBASHEVSKY et al. , « A toolkit for ringLWE Cryptography », Proc.Eurocrypt'13, Lect. Notes Comp. Sci., 7881, Springer-Verlag, Hongrie, (2013) 35 - 54 p.

[3] - R. BARULESCU et Al., « A quasi-polynomial algorithm for discrete logarithm in finite fields and small caracteristic », Proc.Eurocrypt'14, Lect. Notes Comp. Sci., 8841, Springer-Verlag, Hongrie, (2014) 1 - 16 p.

[4] - J.-B. HIRIART-URRUTY, « Les nombres entiers : des amis qui nous posent des problèmes », Toulouse, (2014)

[5] - M. ABDULAZI—ALANAZI et al., « An infinite family of congruences for l-regular overpartitions », Integers 16, Angleterre, (2016)

[6] - M. SGHIAR, « Découverte de la loi cachée pour les nombres premiers », *IOSR Journal of Mathematics*, France, (2017)

[7] - J. BAYLESS et al., « New bounds and computations on prime-indexed primes », Integers 13, Angleterre, (2013)

[8] - W.-D. BANKS et al., « Optimal primitive sets with restricted primes », Integers 13, Angleterre, (2013)

[9] - O. BORDELLES, « Autour du théorème de la progression arithmétique », AMQ, Québec, (2012)

[10] - E. NASLUND, « The average largest prime factor », Integers 13, Angleterre, (2013)

[11] - A. CHRISTIAN, « New bounds for the prime counting function », Integers 16, Angleterre, (2016)

[12] - G. TENENBAUM, « Introduction to Analytic and Probabilistic Numbery Theory», Graduite Studies in Mathematics 163, Amer. Math. Soc., USA, (2015)

[13] - G. TENENBAUM et J. WU, « Théorie analytique et probabiliste des nombres, 307 exercices corrigés », Coll. Echelles, Belin, (2014)

[14] - M. GRIFFITHS, « Somme obvious facts about the prime », *The Mathematical Gazette*, Austral, (2005)

[15] - P.- T. KRASOPOULOS, « *A resultat on the sequence of primes* », *The Mathematical Gazette*, Austral, (2005)

[16] - L. JONES, « *On the iteration of function related to Euler's φ -function* », Integers 10, Angleterre, (2010)

[17] - G. BAREIKIS et al., « On the numbers of divisors in arithmetical semigroup », Ann.Univ.Sci.Budap.Rolando Eôrvôs,Sect. Comput. Hongrie, (2013)

[18] - M. SGHIAR, « Des applications génératrices des nombres premiers et cinq preuves de l'hypothèse de Riemann », *Pioneer Journal of Algebra, Number theory and its applications*, France, (2015)

[19] - J.-L. NICOLAS et al., « Robin's theorem, primes, and new elementary reformulation of the Riemann Hypothesis », Integers 11, Angleterre, (2011)

[20] - M. SGHIAR, « Des applications génératrices des nombres premiers et cinq preuves de l'hypothèse de Riemann », *Pioneer Journal of Algebra, Number theory and its applications*, France, (2015)

[21] - K. SOUNDARARAJAN et R.-L. OLIVIER, « The distribution of consective primer number », *Journal of Mathematics*, France, (2016)
[22] - T. BROWN et al., « *On double 3-terme arithmetic progressions* », Integers 14, Angleterre, (2014)
[23] - M. SGHIAR, *« Découverte de la loi cachée pour les nombres premiers* », *IOSR Journal of Mathematics*, France, (2017)