Approche mathématique de l'analyse marginale

François NDAYIRAGIJE

Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Université du Burundi, BP 2700 Bujumbura, Burundi

* Correspondance, courriel : *ndayiragijefrancois@yahoo.fr*

Résumé

L'analyse marginale est consacrée à l'interprétation économique de la notion de dérivée et à l'utilisation de celle-ci dans les problèmes de minimisation du coût moyen et de maximisation du profit. La détermination du coût marginal et de la recette marginale repose sur des calculs différentiels à partir du coût total, du coût moyen et de la recette totale. Les coûts totaux d'une part et les coûts moyens et marginaux d'autre part sont essentiellement différents. Le but de cet article est d'expliciter les différentes composantes de l'analyse marginale, en utilisant les notions mathématiques.

Mots-clés : *analyse marginale, dérivée, minimisation, maximisation, coût moyen, profit.*

Abstract

Mathematical approach of marginal analysis

Marginal analysis is devoted to the economic interpretation of the concept of derivative and use thereof in the minimization problems of average cost and profit maximization. The determination of marginal cost and marginal revenue is based on differential calculations from a total cost, an average cost and a total revenue. The total costs on the one hand and the average and marginal costs on the other hand are essentially different. The goal of this paper is to explain the various components of marginal analysis, using mathematical concepts.

Keywords : *marginal analysis, derivative, minimizing, maximizing, average cost, profit.*

1. Introduction

L'analyse marginale permet de déterminer le niveau optimal de production [1 - 3]. Le calcul du coût marginal est souvent utilisé pour la prise de décision d'acceptation ou de refus d'une commande supplémentaire. C'est un outil qui éclaire le gestionnaire dans sa prise de décision à court terme. Le coût marginal n'est pas, à proprement parler, une méthode de calcul de coût. L'analyse marginale est utilisée à priori pour prendre des décisions à caractère stratégique ou exceptionnel telles qu'accepter une commande supplémentaire compte tenu de la structure productive, faire ou sous-traiter, passer d'un prix de vente unique à une tarification dégressive ou à un prix établi selon la qualité du client [4, 5], etc. Ces décisions nécessitent des études à long terme car les modifications de structure engagent l'entreprise sur plusieurs exercices. Le coût marginal est composé de charges variables de la production élémentaire, majorées du coût de la structure complémentaire qu'il est nécessaire de mettre en place pour obtenir la production additionnelle ou minorées du coût de la réduction de structure en cas de diminution de la production. Par ailleurs, le bénéfice marginal attendu doit assurer la pérennité des investissements réalisés [6, 7]. L'application de l'analyse marginale pose d'importantes difficultés car les facteurs de production ne sont pas toujours divisibles. Dans cet article, les différentes composantes de l'analyse marginale sont explicitées, en utilisant la fonction polynôme [8] et la fonction dérivée [9, 10] qui sont des notions mathématiques connues. Par la suite, nous donnons dans cet article l'interprétation mathématique de la minimisation du coût moyen et de la maximisation du profit total.

2. Méthodologie

2-1. Fonction polynôme

La fonction polynôme P(x) est définie par [8] :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{1}$$

où, les a_k sont des coefficients réels non nuls de P(x).

Cette fonction peut être mise à la forme

$$P(x) = g(x) + a_0 \tag{2}$$

où, $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x$ et a_0 est un terme constant.

Si $x = 0$, alors $P(0) = a_0$ et $g(0) = 0$ (3)

2-2. Nombre dérivé et fonction dérivée

Soient la fonction f : *IR* ⟶ *IR* : x ⟶ f(x), continue en le réel a ; I l'intervalle de centre a, inclus au domaine de f ; h le réel tel que a + h appartienne à I [9, 10]. Nous donnons à la variable x un accroissement h en a. Il correspond pour la fonction un accroissement

$$f(a + h) - f(a) \tag{4}$$

Le quotient

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{5}$$

est appelé taux d'accroissement de f en a.

La fonction f est dérivable en le réel a, si le taux d'accroissement de f en a admet une limite réelle lorsque h tend vers 0. Cette limite réelle porte le nom de nombre dérivé de f en a qui est noté

$$f' = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{6}$$

La fonction f est dérivable sur la partie A de IR, si f est dérivable en tout réel de A. La fonction dérivée de f ou, plus simplement, la dérivée de f est la fonction qui, à chaque réel a en lequel f est dérivable, fait correspondre le nombre dérivé de f en a. Elle est notée f'.

3. Résultats et discussion

3-1. La fonction de coût total de production et la fonction polynôme

Soit C(q) une fonction dépendant d'une seule grandeur q. Cette fonction définie de IR^+ dans *IR* s'appelle fonction de coût total (ou global) de production [1 - 3]. Comme la ***Formule (2)***, elle se décompose en la somme de coût variable total C_v (q) et de coût fixe total F :

$$C(q) = C_v(q) + F$$

Lorsque q est nulle, on a $C(0) = F$ et $C_v(0) = 0$ qui sont des expressions similaires à celles de la ***Formule (3)***. Donc, dans cet article, nous donnons la correspondance suivante qui est générale :

« *$C(q) = C_v(q) + F$* » *correspond à* « *$P(x) = g(x) + a_0$* »,

où « *$C_v(q)$* » *correspond à* « *$g(x)$* » *et* « *F* » *correspond à* « a_0 ».

3-2. La fonction du coût marginal de production et la fonction dérivée

Le surcroît de coût lié à la production d'une unité supplémentaire d'output [1] i.e. l'accroissement du coût total de production dû à la production d'une unité supplémentaire est appelé coût marginal de production et est noté Cm [2, 3] :

$$Cm(q) = C(q+1) - C(q) \text{ ou } Cm(q) = C(q) - C(q-1) \tag{7}$$

Lorsque nous passons de la production q à la production voisine $(q + \Delta q)$, la variation du coût total est égale à

$$C(q + \Delta q) - C(q) \tag{8}$$

Ces deux ***Formules*** précédentes sont équivalentes. La ***Formule (8)*** étant similaire à la ***Formule (4)***, les ***Formules*** équivalentes aux ***Formules (5) et (6)*** deviennent respectivement

$$\frac{C(q+\Delta q) - C(q)}{\Delta q} \tag{9}$$

et

$$Cm(q) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{C(q+\Delta q) - C(q)}{\Delta q} \tag{10}$$

qui est le coût marginal de production, définie par la variation relative du coût total lorsque la modification de production Δq devient petite. Donc la fonction de coût marginal de production est égale à la dérivée de la fonction de coût total de production :

$$Cm : IR_0^+ \rightarrow IR : q \rightarrow Cm(q) = C'(q) = \frac{d\,C(q)}{dq} \text{(cas continu) ou égal } \frac{\Delta\,C(q)}{\Delta q} \text{(cas discret)} \quad (11)$$

3-3. Minimisation du coût moyen et son interprétation mathématique

Le coût de production par unité de bien produite porte le nom de coût moyen de production et se note par CM [2, 3] :

$$CM : IR_0^+ \rightarrow IR : q \rightarrow CM(q) = \frac{C(q)}{q} \quad (12)$$

Le minimum du coût moyen de production correspond à une quantité optimale produite z pour laquelle le coût moyen est égal au coût marginal, c'est- à- dire que le coût marginal est sécant avec le coût moyen pour le niveau d'output tel que la production se fasse au coût unitaire minimum [1] :

$$CM(z) = Cm(z) \quad (13)$$

Donc, la quantité optimale à produire z qui minimise le coût moyen est donnée par

$$CM(z) \quad (14)$$

Mathématiquement parlant et dans cet article, nous affirmons pour tous les cas, que la quantité optimale z est l'abscisse obtenue après la projection du point d'intersection des courbes définies respectivement par le coût moyen de production et le coût marginal de production sur l'axe des abscisses. Utilisant l'interprétation géométrique de la dérivée et disposant de la seule courbe du coût total de production, [2] a montré que la quantité optimale z est l'abscisse du point de contact de la tangente menée par l'origine, à cette courbe.

3-4. Maximisation du profit total et son interprétation mathématique

Le produit de la quantité produite par le prix unitaire du bien considéré est appelé recette totale et est notée RT [1 - 3] :

$$RT(q) = q.p(q) \quad (15)$$

Le prix p, lié à la quantité produite q, constitue la loi de demande du bien. La recette moyenne est égale au prix unitaire :

$$RM(q) = \frac{RT(q)}{q} = p(q) \quad (16)$$

et la recette marginale est donnée par :

$$Rm(q) = RT'(q) = p(q) + q.p'(q) \quad (17)$$

La fonction de profit total [1 - 3], au sens microéconomique du terme, est la fonction qui mesure, pour toute quantité produite d'un bien ou d'un service, la différence entre la recette totale tirée de la vente des unités de ce bien et le coût total de leur production. On la note par :

$$\pi(q) = RT(q) - C(q) \quad (18)$$

Le maximum du profit total correspond à une quantité z pour laquelle la recette marginale est égale au coût marginal :

Rm(z) = Cm(z) (19)

C'est la condition du premier ordre conduisant à la solution du problème de maximisation du profit total. Donc, la quantité optimale à produire z qui maximise le profit réalisé est donnée par :

$$\pi(z) = RT(z) - C(z) \tag{20}$$

De même que pour le cas de la minimisation du coût moyen, mathématiquement parlant, nous affirmons aussi pour tous les cas, que la quantité optimale z est l'abscisse obtenue après la projection du point d'intersection des courbes définies respectivement par la recette marginale et le coût marginal de production.

3-5. Illustration

Soit le coût de production

$C(q) = q^3 - 2q^2 + q + 8$,

Et la loi de demande

$q(p) = 2 - p$

Le coût de production se décomposant en coût variable total et en coût fixe total, on a :

$C(q) = C_v(q) + F = (q^3 - 2q^3 + q) + 8$

Donc, $C_v(q) = q^3 - 2q^3 + q$ et $F = 8$

- De la ***Formule (11),*** $Cm(q) = 3q^2 - 4q+1$;
- De la ***Formule (12),*** $CM(q) = q^2 - 2q + 1 + \frac{8}{q}$;
- La ***Formule (13)*** donne la quantité optimale à produire : z = 2 ;
- Le coût moyen minimum est donné par la ***Formule (14)*** : CM(2) = 5 ;
- La ***Formule (16)*** donne $RT(q) = q.\ p(q) = = -q^2 + 2q$;
- La ***Formule (17)*** donne $Rm(q) = -2q+2$;
- La quantité optimale à produire z = 1 est donnée par la ***Formule (19)*** ;
- La ***Formule (20)*** donne la valeur du profit maximal réalisé : $\pi(z) = -1$ (perte).

4. Conclusion

En conclusion, il est prouvé que la fonction de coût total est une fonction polynôme où le coût fixe total est la constante de la fonction polynôme. Avec cette généralisation, il est désormais très facile de distinguer directement les composantes de la fonction du coût total. Nous avons aussi montré que l'abscisse du point minimum du coût moyen résulte de la projection de l'intersection des courbes définies par le coût moyen de production et le coût marginal de production sur l'axe des abscisses. De même, nous avons montré que l'abscisse du point maximum du profit total est le résultat de la projection de l'intersection des courbes définies par la recette marginale et le coût marginal de production sur l'axe des abscisses.

Références

[1] - J. P. GAYANT, "Aide-mémoire Micro-économie", Paris, Dunod, (2014)
[2] - L. ESCH, "Mathématique pour économistes et gestionnaires", Bruxelles, De Boeck- Université, 4è édition, (2010)
[3] - J. HEIZER, B. RENDER et C. MUNSONI, "Operations Management : Sustainability and Supply Chain Management '', 12th Edition, Pearson, (2016)
[4] - G. A. JEHLE et P. J. RENY, "Advanced Microeconomic Theory ", 3rd Edition, FT Prentice Hall, (2011)
[5] - H. L. VARIAN, "Intermediate Microeconomics : A Modern Approach", W. W. Norton & Company, New York, (2010)
[6] - K. H. TAN, C. P. LIM, K. PLATTS et H. S. KOAY, " Managing Manufacturing Technology Investments : An Intelligent Learning System ", *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, Vol. 19, No. 1 (2006) 4 - 13 p.
[7] - J. HEIZER, B. RENDER, "Operations Management'', Tenth Edition, Upper Saddle River, NJ : Pearson / Prentice Hall, (2010)
[8] - A. ADAM, P. CLOSE, F. LOUSBERG, TROMME "ESPACE MATH 3", Bruxelles, De Boeck 2è édition, (1997)
[9] - A. ADAM et F. LOUSBERG, "ESPACE MATH 5e/6e", Bruxelles, De Boeck, (2005)
[10] - G. ARCHINARD et B. GUERRIEN, "Analyse mathématique pour économistes ", Paris, Economica, 3è édition, (1998)