

Équations généralisées de la méthode des différences finies pour le calcul des plaques minces isotropes soumises à une flexion, compression, traction

Sali MOUSSA^{1*}, Abdou NJIFENJOU^{1,2} et Seydou YOUSOUFA¹

¹ Université de Douala, Laboratoire d'Énergie Modélisation Matériaux et Méthode (E3M),
BP 2071 Douala, Cameroun

² Université de Yaoundé I, Laboratoire de l'Ingénierie Mathématique et Système d'Information (LIMS),
BP 8390 Yaoundé, Cameroun

* Correspondance, courriel : s_moussa@fgi-ud.org

Résumé

Ce travail porte sur les Equations Généralisées de la Méthode des Différences Finies et leur application au calcul des plaques minces fléchies comprimées et / ou tendues. Cette approche numérique permet de prendre en compte les discontinuités finies de la fonction recherchée, de sa dérivée première et de la partie droite de l'équation différentielle sans introduction des nœuds fictifs ou bien un raffinement particulier du maillage. Pour mener à bien ce travail nous avons commencé par la transformation de l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites, ensuite nous avons introduit des nouveaux paramètres adimensionnels et substitué des nouvelles équations différentielles par les équations généralisées de la méthode des différences finies pour enfin aboutir à l'élaboration d'un algorithme de calcul et à la résolution du système d'équations algébriques afin d'obtenir les coefficients moment fléchissant et flèche. Les exemples présentés ici ont permis de montrer la simplicité de l'algorithme. Les résultats montrent la précision de la méthode et la convergence des solutions.

Mots-clés : *Équations généralisées, plaque, discontinuités finies, points fictifs, paramètres adimensionnels.*

Abstract

Generalized equations of the finite difference method for the calculation of isotropic thin plates subject to flexion, compression and / or traction

This work deals with the Generalized Equations of the Finite Difference Method and their application to the computation of compressed and / or tense thin flexed plates. This numerical approach makes it possible to take into consideration the finite discontinuities of the desired function, of its first derivative and of the right part of the differential equation without introduction of the ghost nodes or a particular refinement of the mesh. To carry out this work we started with the transformation of the partial differential equation and the boundary conditions, then we introduced new dimensionless parameters and substituted new differential equations by the generalized equations of the finite difference method for finally lead to the development of a calculation algorithm and the resolution of the system of algebraic equations in order to obtain the bending moment and deflection coefficients. The results show the precision of the method and the convergence of the solutions.

Keywords : *Generalized equations, plates, finite discontinuities, fictitious points, dimensionless parameters.*

1. Introduction

Les voiles, les radiers, les planchers des ouvrages de génie civil, sont en général des plaques ou des coques. Ce type de structure se rencontre aussi dans les constructions aéronautiques ou navales par exemple la carlingue de l'avion ou la coque de navire. En plus en mécanique, les rondelles, la culasse, les pistons, les cylindres, les boîtes de vitesse sont aussi des plaques ou des coques. Pendant le processus de leur exploitation, ces structures subissent l'action non seulement des charges statiques, mais aussi des charges dynamiques. Le calcul de telles structures doit être précis et facile à exécuter. Malgré l'importance pratique des éléments de ce type relevée dans un certain nombre d'ouvrages, beaucoup de questions liées à leur calcul restent encore d'actualité. Des nombreux travaux des chercheurs abordent le problème des plaques et coques voir par exemple [1 - 4, 17 - 22]. Le calcul de ces structures nécessite la mise en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués, et prenant en compte les spécificités de ces structures. Leur calcul par les méthodes analytiques reste très fastidieux et volumineux voir par exemple [5 - 7]. Les méthodes numériques décrites dans les références [4, 8 - 10] sont plus efficaces. Parmi les méthodes numériques, la méthode des éléments finis est la plus utilisée, mais elle présente un certain nombre de difficultés telles que la formation de la matrice de rigidité et le resserrement du maillage autour des zones spécifiques. Des nouvelles méthodes numériques beaucoup plus simples, simples et qui donnent des résultats appréciables sont développées par d'autres chercheurs [11 - 13]. Parmi ces méthodes il y'a les Equations Généralisées de la Méthode des Différences Finies qui font l'objet de cet article. De façon plus précise, nous allons utiliser cette méthode pour élaborer un algorithme de calcul des plaques minces isotropes d'épaisseur constante, soumises à une flexion combinée à une compression et/ou traction. Le travail est organisé de la façon suivante. Après l'introduction qui pose la problématique du sujet, nous déroulerons la méthodologie de la mise en œuvre des Equations Généralisées de la Méthode des Différences Finies qui se décline en trois points. Nous commencerons par décrire les équations du problème modèle, y compris les conditions aux limites, ensuite nous introduirons des nouveaux paramètres adimensionnels dans le système d'équations ainsi obtenu et dans les équations décrivant les conditions aux limites. Nous continuerons par la substitution aux nouvelles équations différentielles les équations généralisées de la méthode des différences finies. Ce qui permettra d'obtenir un système d'équations algébriques. Enfin nous élaborerons un algorithme de calcul. Avant de conclure, nous consacrerons la dernière partie du travail à la validation de notre approche (Equations Généralisées de la Méthode des Différences Finies) à travers la résolution numérique des problèmes-tests.

2. Méthodologie

2-1. Équations du problème modèle

2-1-1. Équation aux dérivées partielles de la déformée d'une plaque fléchie- comprimée et /ou tendue

L'Équation aux dérivées partielles de la déformée d'une plaque rectangulaire isotrope, soumise à une flexion – compression et / ou tendue et ayant une rigidité constante s'écrit [1, 11] :

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} = \frac{1}{D} [q(X, Y) + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}] \quad (1)$$

où, $W(X, Y)$ étant la déformée transversale de la plaque (fonction recherchée); $q(X, Y)$ l'intensité de la charge normale au plan moyen de la plaque répartie de manière quelconque; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ la rigidité

cylindrique (flexionnelle) de la plaque d'épaisseur constante ; μ le coefficient de Poisson ; E le module d'Young; h l'épaisseur de la plaque ; N_x, N_y les projections respectivement sur les axes X et Y des forces agissant dans le plan de la plaque ; N_{xy} forces tangentielles agissant. Il faut noter sur les bords de la plaque avec $N_{xy} = N_{yx}$ [1].

A l'aide de quelques modifications **l'Équation (1)** peut être ramenée à un système de deux **Équations** aux dérivées partielles d'ordre deux :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial Y^2} = q(X, Y) + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = \quad (3)$$

$$\text{où } M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu}; \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \quad (4)$$

$M_x; M_y$ étant des moments fléchissant suivant les axes (OX) et (OY) .

La résolution du système d'**Équations (2), (3)** se fait en prenant en compte les conditions aux limites.

2-1-2. Conditions aux limites

2-1-2-1. Appuis articulés

Si le bord articulé est parallèle à l'axe X exemple $Y = 0$, alors :

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right); \quad W = 0 \quad (5)$$

De la deuxième **Équation de (5)**, il s'en suit que $\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0$. Par conséquent en considérant les deux dernières **égalités (4)** nous déduisons $M = 0$. Si on considère que des conditions générales sont données sur le bord de la plaque :

$W = W_0(X); M_y = M_y^0(X)$, alors des **Formules** ci-dessus nous obtenons :

$$M = M_y^0(X) - D(1 - \mu) \frac{\partial^2 W_0(X)}{\partial X^2} \quad (5a)$$

2-1-2-2. Appuis encastrés

Si le bord encasté est parallèle à l'axe X exemple $Y = 0$, alors :

$$a) \quad W = W_0(X); \quad b) \quad \frac{\partial W}{\partial Y} = W_0(X) \quad (6)$$

2-1-2-3. Bords sans appui

Si le bord libre est parallèle à l'axe X exemple $Y = 0$, alors :

$$a) \quad M_Y = M_0^Y(X); \quad b) \quad V_Y = V_Y^0(X) + N_Y \frac{\partial W}{\partial Y} \quad (7)$$

$V_Y^0(X)$ étant la valeur donnée de l'effort tranchant généralisé sur le bord de la plaque, en particulier elle est nulle.

Ecrivons les **Équations (7)** en tenant compte des expressions de M_Y et V_Y dans [1] sous la forme suivante :

$$a) \quad M + D(1 - \mu) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = M_0^Y(X); \quad b) \quad \frac{\partial M}{\partial Y} - D(1 - \mu) \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial^2 \partial Y} = V_Y^0(X) + N_Y \frac{\partial W}{\partial Y} \quad (8)$$

Nous remarquons que toutes les **Équations (5), (5a), (6), (7) et (8)** sont exprimées en fonction de M , de W et de leurs dérivées partielles. Hormis les conditions aux limites nous pouvons avoir besoin des conditions aux nœuds anguleux. Examinons ces conditions pour le nœud supérieur gauche d'une plaque rectangulaire pour lequel $X = 0$ et $Y = 0$. Si les côtés de la plaque formant l'angle au nœud $X = 0$ et $Y = 0$ sont articulés ou encastés, alors en ce nœud $W = W_0, M = M_0$. Ici W_0 est le tassement donné de la plaque au nœud anguleux. Si $W_0 \neq 0$, alors M_0 se détermine par la **Formule (4)** en fonction des dérivées partielles $W_0(X), W_0(Y)$ où $W_0(X), W_0(Y)$ étant les tassements de la plaque exprimés sous forme des fonctions respectivement lorsque $X = 0$ et $Y = 0$. Comme cas particulier nous avons $W = M = 0$. Si tous les côtés de la plaque sont sans appui au niveau du nœud anguleux, alors $M = M_0, R = R_0$ où $M_0 = \frac{M_X^0 + M_Y^0}{1 + \mu}$;

M_X^0, M_Y^0 étant les valeurs données de M_X, M_Y au nœud anguleux ; R_0 - la valeur donnée d'une force concentrée au nœud anguleux. Dans les cas pratiques $M_X^0 = M_Y^0 = R_0 = 0$, par conséquent $M = 0, R = 0$. Il existe encore deux cas : un bord sans appui le second articulé et un bord sans appui l'autre encasté. Ici nous nous limiterons sur le cas des conditions homogènes au nœud anguleux, c'est-à-dire quand les valeurs sont nulles : dans le premier cas $M = 0, W = 0$; dans le deuxième cas $W = 0, \frac{\partial W}{\partial Y} = 0$ ou bien $\frac{\partial W}{\partial X} = 0$.

2-2. Introduction des paramètres adimensionnels

2-2-1. Équations aux dérivées partielles de la déformée

Introduisons les paramètres adimensionnels ci-dessous [1, 13] :

$$\xi = \frac{X}{a}; \quad \eta = \frac{Y}{a}; \quad P = \frac{q(X, Y)}{q_0}; \quad m = \frac{M}{q_0 a^2}; \quad \omega = \frac{WD}{q_0 a^4}; \quad m^{(\xi)} = \frac{M_X}{q_0 a^2}; \quad m^{(\eta)} = \frac{M_Y}{q_0 a^2} \quad (9)$$

où, ξ, η étant les coordonnées cartésiennes adimensionnelles ; a - la longueur du plus petit côté de la plaque rectangulaire q_0 - une valeur fixée de la charge q .

Par ailleurs nous allons considérer les paramètres utilisés dans [1] :

$$\bar{\alpha} = \frac{N_X}{N}; \quad \bar{\gamma} = \frac{N_Y}{N}; \quad \bar{\beta} = -2 \frac{N_{XY}}{N}; \quad N = \max(|N_X|, |N_Y|, |N_{XY}|) \quad (10)$$

$-1 \leq \bar{\alpha} \leq 1, -1 \leq \bar{\beta} \leq 1, -1 \leq \bar{\gamma} \leq 1$ où $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, k$ étant des coefficients.

En Introduisant ces paramètres dans le système d'**Équations (2), (3)** et en tenant de **(4)** nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} = -k \left(\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) = -P \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} = -m \quad (12)$$

avec $k = \frac{Na^2}{D}$; $m = \frac{m^{(\xi)} + m^{(\eta)}}{1 + \mu}$

où, $m^{(\xi)} = -(\omega^{\xi\xi} + \mu\omega^{\eta\eta})$; $m^{(\eta)} = -(\omega^{\eta\eta} + \mu\omega^{\xi\xi})$ (13)

$m^{(\xi\eta)} = -m^{(\eta\xi)} = (1 - \mu)\omega^{\xi\eta}$ (14)

$\omega^{(\xi\xi)} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}$; $\omega^{(\eta\eta)} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}$; $\omega^{(\xi\eta)} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta}$; $m^{(\xi\eta)} = \frac{M_{XY}}{q_0 a^2}$ (15)

La résolution des **Équations (11) et (12)** se fera en tenant compte des conditions aux limites. Les **Équations (11) et (12)** d'ordre deux sont écrites pour les points intermédiaires du maillage, seront substituées par les **Équations** généralisées de la méthode des différences finies pour obtenir un système d'équations algébriques dont les inconnues seront les coefficients m et ω .

2-2-2. Conditions aux limites

2-2-2-1. Appuis articulés

Ecrivons les **Équations (5) et (5a)** pour le bord articulé en fonction des paramètres adimensionnés introduits plus haut :

a) $\omega = \omega_0(\xi)$; b) $m = m_0^{(\eta)} - (1 - \mu)\omega_0^{\xi\xi}(\xi)$ (16)

2-2-2-2. Appuis encastrés

Pour l'appui encastré écrivons les **Équations (6)**:

a) $\omega = \omega_0(\xi)$; b) $\omega^\eta(\xi) = \omega_0^\eta(\xi)$ (17)

2-2-2-3. Sans appuis

Ecrivons les **Équations (7a) et (7b)** en fonction des paramètres sans unités, nous obtenons :

a) $m + (1 - \mu)\omega^{\xi\xi}(\xi) = m_0^{(\eta)}$ b) $m^\eta + (1 - \mu)\omega^{\xi\xi\eta}(\xi) = v_0^{(\eta)}(\xi) + k\bar{\gamma}\omega^\eta$ (18)

où $v_0^{(\eta)} = \frac{V_Y}{q_0 a}$

Pour les nœuds anguleux nous avons :

$$m = 0; \quad r = 0 \quad \text{et} \quad \omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0 \quad (19)$$

Dans les **Formules** ci-dessus nous avons les égalités suivantes :

$$m^\xi = \frac{\partial m}{\partial \xi}; \quad m^\eta = \frac{\partial m}{\partial \eta}; \quad \omega^{\xi\xi} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}; \quad \omega^{\eta\eta} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}; \quad \omega^{\xi\eta} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta}; \quad (20)$$

$$\omega^\eta = \frac{\partial \omega}{\partial \eta}; \quad \omega^{\xi\xi\eta} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^2 \partial \eta}; \quad r = \frac{R}{q_0 a^2}$$

Les indices supérieurs droits entre parenthèses indiquent les directions. Exemple $m^{(\eta)}$ - moment fléchissant adimensionnel dans la direction de l'axe η ; $v_0^{(\eta)}(\xi)$ - la valeur donnée sur le bord sans appui ($\eta = 0$) de l'effort tranchant généralisé adimensionnel dans le sens de l'axe η , qui est représenté sous forme d'une fonction de la coordonnée ξ .

2-3. Substitution aux équations aux dérivées partielles des équations généralisées de la méthode des différences finies

2-3-1. Équation aux dérivées partielles de la déformée

La résolution numérique du problème sera effectuée sur maillage régulier, dont le pas est h dans la direction des axes des coordonnées ξ et η . Une partie de ce maillage est représenté sur la **Figure 1**, où les chiffres romains indiquent les numéros des éléments qui ont un nœud commun i, j .

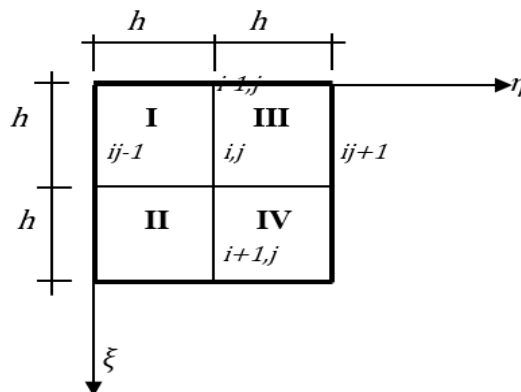


Figure 1 : Maillage régulier

Etant donné que **l'Équation (11)** est un cas particulier de **l'Équation (6)** dans [13], alors pour la substituer par les équations généralisées de MDF, il suffit d'écrire la somme des membres gauches de **l'Équation (4)** dans [13] en posant $\omega = m$; $\alpha = \gamma = 1$; $\delta = \beta = \sigma = 0$ et $\omega_1 = \omega$; $\alpha_1 = -k\bar{\alpha}$; $\beta_1 = -k\bar{\beta}$; $\gamma_1 = -k\bar{\gamma}$; $\delta_1 = \sigma_1 = 0$. Cette somme doit être égale à la partie droite de **l'Équation (4)** dans [13]. Écrivons cette équation pour un maillage régulier $h_i = \tau_i = h_{i+1} = \tau_{i+1} = h$, lorsque m et ω sont continus et en considérant que P est constant dans les limites de chaque élément, mais peut varier de manière brusque d'un élément à un autre :

$$\left\{ \begin{aligned} & m_{i-1j} + m_{ij-1} - 4m_{ij} + m_{i+1j} + m_{ij+1} + \\ & + \frac{h}{2} (\Delta^{I-II} m_{ij}^{\xi} + \Delta^{III-IV} m_{ij}^{\xi} + \Delta^{I-III} m_{ij}^{\eta} + \Delta^{II-IV} m_{ij}^{\eta}) - \\ & - \frac{k}{4} \left[\bar{\beta} (\omega_{i-1j-1} - \omega_{i-1j+1} - \omega_{i+1j-1} + \omega_{i+1j+1}) + \right. \\ & \left. + 4\bar{\alpha} (\omega_{i-1j} + \omega_{i+1j}) + 4\bar{\gamma} (\omega_{ij-1} + \omega_{ij+1}) - 8(\bar{\alpha} + \bar{\gamma}) \omega_{ij} \right] = \end{aligned} \right. \quad (21)$$

$$= -\frac{h^2}{4} ({}^I P_{ij} + {}^{II} P_{ij} + {}^{III} P_{ij} + {}^{IV} P_{ij})$$

où $\Delta^{I-II} m_{ij}^{\xi} = {}^I m_{ij}^{\xi} - {}^{II} m_{ij}^{\xi}$; $\Delta^{III-IV} m_{ij}^{\xi} = {}^{III} m_{ij}^{\xi} - {}^{IV} m_{ij}^{\xi}$; $\Delta^{I-III} m_{ij}^{\eta} = {}^I m_{ij}^{\eta} - {}^{III} m_{ij}^{\eta}$;
 $\Delta^{II-IV} m_{ij}^{\eta} = {}^{II} m_{ij}^{\eta} - {}^{IV} m_{ij}^{\eta}$, $i = 2, 3, \dots, n-1$; $j = 2, 3, \dots, n-1$ (22)

Les autres expressions du même genre se calculent de manière analogue. **L'Équation (21)** est appelée équation généralisée de la méthode des différences finies qui se substitue à **l'Équation (11)**. **L'Équation** généralisée de la Méthode des Différences Finies qui se substitue à **l'Équation aux dérivées partielles (12)** est analogue à celle obtenue dans [14] :

$$\omega_{i-1j} + \omega_{ij-1} - 4\omega_{ij} + \omega_{i+1j} + \omega_{ij+1} = -h^2 m_{ij} \quad (23)$$

où, $i = 2, 3, \dots, n-1$; $j = 2, 3, \dots, n-1$.

Notons que les dérivées partielles de ω^{ξ} : $\omega^{\xi} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi}$ et $\omega^{\eta} = \frac{\partial \omega}{\partial \eta}$ peuvent être discontinues lorsque la plaque comporte des rotules, tandis que m sera discontinu si des moments fléchissants ponctuels extérieurs sont appliqués dans une des directions des axes des coordonnées. Ces cas sont rares en pratique et ne sont pas examinés ici.

2-3-2. Substitution aux conditions aux limites

Lorsque tous les bords de la plaque sont articulés le problème se résume à la résolution du système **d'Équations (21 - 23)**. Ces **Équations** seront écrites pour chaque point intérieur du domaine d'intégration.

2-3-2-1. Appuis articulés

Si les bords de la plaque sont articulés, alors dans le cas général nous avons :

$$a) \omega = \omega_0(\xi); \quad b) m = m_0^{(\eta)}(\xi) - (1 - \mu)\omega_0^{\xi\xi}(\xi) \quad (24)$$

où $\omega_0(\xi)$, $m_0^{(\eta)}(\xi)$, $\omega_0^{\xi\xi}(\xi)$ étant connus.

Si les conditions d'appui diffèrent des articulations, alors il faudra leur substituer les conditions aux limites correspondantes décrites ci-après.

2-3-2-2. Appuis encastrés

Supposons que le bord gauche de la plaque ($\eta = 0$) soit encastré. Pour calculer ω_{ij}^{η} il suffit d'écrire

L'Équation correspondante (3) dans [13] pour un maillage carré, en posant $\omega = \omega$, $P = m$, $\alpha = \gamma = 1$, $\delta = \beta = \sigma = 0$. Ecrivons cette équation lorsque m , ω , ω^ξ , ω^η sont continus :

$$\omega_{ij}^\eta = \frac{1}{2h} (\omega_{i-1j} + \omega_{i+1j} - 4\omega_{ij} + 2\omega_{ij+1} + h^2 m_{ij}), \quad (25)$$

où $i = 2, 3, \dots, n-1$; $j = 1$.

Les conditions aux limites du bord encasté nous permettent d'annuler ω_{ij}^η , ω_{i-1j} , ω_{ij} , ω_{i+1j} dans (25) et nous obtenons :

$$\omega_{ij+1} = -\frac{h^2}{2} m_{ij}, \quad (26)$$

$i = 2, 3, \dots, n-1$; $j = 1$.

Pour le bord supérieur de la plaque ($\xi = 0$) **L'Équation (26)** s'écrit en remplaçant η, i, j respectivement par ξ, j, i . Pour le bord droit ($\eta = 1$) et le bord inférieur ($\xi = 1$) ces équations s'écrivent par reflet, mais ω_{ij}^ξ , ω_{ij}^η changent de signe.

2-3-2-3. Sans appuis

Examinons le cas du bord libre ($\eta = 0$). Pour déterminer ω et m au nœud i, j sur le bord libre de la plaque, on utilise les équations, obtenues en appliquant le procédé de substitution aux **Équations (18)**. Pour cela il suffit d'écrire les **Équations (10), (15)** dans [15] en posant $g = 1$, $g^\eta = 1$, $g^\xi = 0$. Ecrivons ces équations en maintenant le terme $k\bar{\gamma}\omega^\eta$:

- Pour **L'Équation (18) a)**:

$$\omega_{i-1j} - 2\omega_{ij} + \omega_{i+1j} = -\frac{h^2}{1-\mu} [m_{ij} - m_{ij(0)}^{(\eta)}], \quad (27)$$

où $i = 2, 3, \dots, n-1$; $j = 1$.

- Pour **L'Équation (18) b)**:

$$v_0^{(\eta)} = k\bar{\gamma}\omega_{ij}^\eta + \frac{1-\mu}{2h^3} \left[\begin{array}{l} +3\omega_{i-1j} - 4\omega_{i-1j+1} + \omega_{i-1j+2} - \\ -6\omega_{ij} + 8\omega_{ij+1} - 2\omega_{ij+2} + \\ +3\omega_{i+1j} - 4\omega_{i+1j+1} + \omega_{i+1j+2} + \end{array} \right] + \frac{1}{2h} m_{i-1j} - \frac{2}{h} m_{ij} + \frac{1}{2h} m_{i+1j} + \frac{1}{h} m_{ij+1} + \frac{h}{4} ({}^I P_{ij} + {}^II P_{ij}), \quad (28)$$

où, $i = 2, 3, \dots, n-1$; $j = 1$.

Etant donné qu'il existe des forces qui agissent dans le plan moyen de la plaque, alors il est nécessaire de déterminer les rotations au niveau des nœuds appartenant au bord libre. Pour cela nous devons prendre en compte **L'Équation (25)**. **L'Équation** pour le nœud i, j du bord supérieur libre de la plaque s'obtient de

L'Équation (27) en remplaçant i, j respectivement par j, i . Pour le bord droit et le bord inférieur ces équations s'écrivent par reflet. Quant à **L'Équation (28)**, elle s'écrit par analogie pour les différents bords. Nous remarquons que les **Équations (25), (27), (28)** décrivent toutes les conditions aux limites en fonction des inconnues discrètes associées à m et ω . Les **Équations** ainsi obtenues permettent de calculer tous les coefficients m et ω . Ce qui nous permet de déduire de **L'Équation (9)** les efforts tels que les moments fléchissants, les efforts tranchants, les efforts normaux et les moments de torsion pour une plaque soumise à une flexion- compression / et ou traction.

3. Algorithme de calcul

L'algorithme de calcul sur un maillage carré se résume à ce qui suit. Pour tous les points du maillage situés à l'intérieur du domaine d'intégration on écrit les **Équations (21) et (22)**. Pour une plaque dont tous les bords sont articulés, la résolution de ces équations se fait simultanément en considérant les **Équations (24)** dans le cas général $m = \omega = 0$ sur les bords. Dans les autres cas des conditions aux limites on associe aux **Équations (21), (22)** soit **L'Équation (25)**, soit les **Équations (27), (28)**. La résolution des équations ainsi obtenues permettent de déterminer les coefficients m et ω . Les valeurs de $\omega^{\xi\xi}, \omega^{\eta\eta}$ se calculent par les formules connues de la méthode des différences finies. Les valeurs $m^{(\xi)}, m^{(\eta)}$ s'obtiennent par les **Équations (13)**. Pour déterminer $m^{(\xi\eta)}$ par **L'Équation (11)**, il faut calculer $\omega^{\xi\eta}$ par la **Formule** obtenue par approximation parabolique de la fonction ω :

$$\omega_{ij}^{\xi\eta} = \frac{1}{4h^2} (\omega_{i-1j-1} - \omega_{i+1j-1} - \omega_{i-1j+1} + \omega_{i+1j+1}), \tag{29}$$

De **L'Équation (25)** on peut tirer l'expression de ω^η . Par analogie on peut déterminer l'expression de ω^ξ . Ainsi la résolution numérique donne des résultats complets. Tous les paramètres de l'état de contrainte de la plaque sont déterminés.

4. Résultats et discussion

Examinons quelques exemples de calcul des plaques soumises à la flexion combinée avec compression / traction. Pour le premier exemple il s'agit d'une plaque carrée dont tous les quatre côtés sont articulés. La plaque est soumise à l'action d'une charge uniformément répartie sur toute sa surface (**Figure 2**). Par ailleurs les charges de compression sont appliquées de manière uniforme parallèlement à l'axe η . La valeur unitaire des charges de compression $k = 1$ est largement inférieure à la valeur critique. La valeur adimensionnelle de la charge répartie est $P = 1$. Un maillage grossier dont le pas est $h = 1/2$ est représenté sur la **Figure 2**. Ainsi les bords de la plaque étant articulés, les moments et les flèches sur les bords sont nuls d'après les conditions aux limites (24) : $m = \omega = 0$. Pour le point 22 du maillage les **Équations (21), (22)** s'écrivent en posant $\Delta m^\xi = \Delta m^\eta = \bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0$; $P = \bar{\gamma} = k = 1$ et en tenant compte des conditions aux limites et $h = 1/2$:

$$-4m_{22} + \omega_{22} = -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4; \tag{30}$$

$$-4\omega_{22} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot m_{22}. \tag{31}$$

La résolution de ce système d'équations, nous déterminons $m_{22} = 0.06349$; $\omega_{22} = 0.00397$. La valeur de ω_{22} obtenue ici diffère de 4.8 % par rapport à celle obtenue dans [16] à l'aide d'un ordinateur en utilisant 199 membres de la série de Fourier proposée par [1].

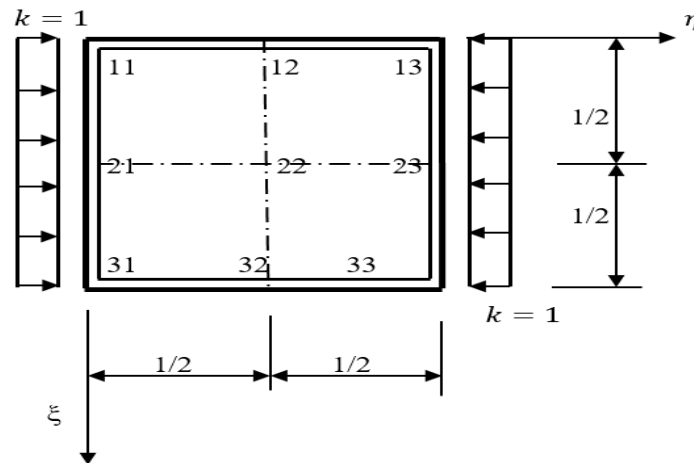


Figure 2 : Plaque carrée d'épaisseur constante articulée sur tous ses bords

Le raffinement de maillage fait ressortir la convergence du résultat vers celui obtenu par [11]. Le **Tableau 1** illustre bien cette convergence. Nous pouvons observer que à partir de $h = 1/8$ la convergence de ω est monotone.

Tableau 1 : Valeurs des coefficients de moment fléchissant et de la flèche centre de la plaque

	Équations Généralisées de la Méthode des Différences Finies					[11]	[1]
	Pas du maillage						
	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$	$h = 1/32$		
m_{\max}	0.06349	0.07238	0.07486	0.07552	0.07552	0.07580	0.07580
ω_{\max}	0.00397	0.00414	0.00416	0.00416	0.00416	0.00417	0.00417

L'écart entre les résultats obtenus dans [1, 11] et ceux obtenus ici, lorsque $h = 1/8$, est de 0.2 % pour ω . Quant à m cet écart est de 1.2 % lorsque $h = 1/8$ et de 0.9 % lorsque $h = 1/16$. Examinons cette fois la combinaison d'une flexion et d'une traction. Dans ce cas le coefficient $k = -1$ Par conséquent les **Équations (21), (22)** s'écrivent pour le nœud 22 comme suit :

$$-4m_{22} - \omega_{22} = -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4; \quad (32)$$

$$-4\omega_{22} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot m_{22}. \quad (33)$$

La résolution de ce système d'équations nous permet d'obtenir : $m_{22} = 0.06154$, $\omega_{22} = 0.003846$. La valeur de ω obtenue ici s'écarte de celle dans [11] de 2.7 %.

Tableau 2 : Valeurs des coefficients de moment fléchissant et de la flèche centre de la plaque

	Équations Généralisées de la Méthode des Différences Finies					[11]
	Pas du maillage					
	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$	$h = 1/32$	$h = 1/16$
m_{\max}	0.06349	0.06835	0.07080	0.07146	0.07163	0.07303
ω_{\max}	0.00397	0.00392	0.00395	0.00396	0.00396	0.00395

Tout comme dans le cas précédent, nous observons une convergence des résultats vers ceux obtenus dans [11] pour $h = 1/16$. L'observation des résultats portés dans les deux tableaux permet de noter la bonne tenue de la méthode. Par ailleurs lorsque $k = 0$, nous obtenons comme cas particulier les équations qui permettent de calculer une plaque en flexion simple. Il faut noter que l'algorithme a été élaboré dans le but d'écrire un code de calcul sur la base des équations généralisées de la méthode des différences finies. Quant aux exemples traités ici manuellement, ils ont permis tout simplement d'illustrer l'efficacité de l'algorithme. Ainsi nous avons montré qu'avec un maillage grossier les équations généralisées de la méthode des différences finies donnent des résultats satisfaisants. Examinons maintenant l'action combinée de la flexion et de la compression bi axiale voir **Figure 3**.

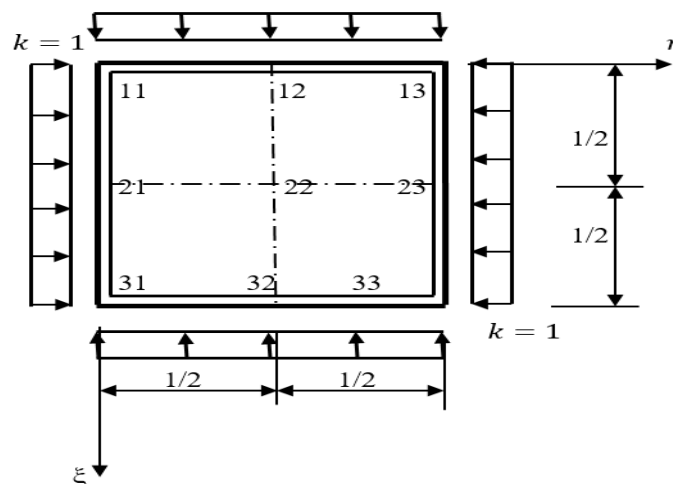


Figure 3 : Plaque carrée d'épaisseur constante articulée sur tous ses bords

Pour ce cas les **Équations (21), (22)** s'écrivent pour le nœud 22 en posant $\Delta m^\xi = \Delta m^\eta = \bar{\beta} = 0$; $P = \bar{\alpha} = \bar{\gamma} = k = 1$ et en tenant compte des conditions aux limites et $h = 1/2$:

$$-4m_{22} + 2\omega_{22} = -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4; \tag{34}$$

$$-4\omega_{22} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot m_{22}. \tag{35}$$

La résolution de ce système d'équations nous permet d'obtenir : $m_{22} = 0.06452$; $\omega_{22} = 0.00403$. Les résultats obtenus avec différentes valeurs du pas des maillages sont consignés dans le **Tableau 3**. Nous pouvons aisément observer la convergence des solutions. Cela démontre la stabilité de la méthode.

Tableau 3 : Valeurs des coefficients de moment fléchissant et de la flèche centre de la plaque

	Équations Généralisées de la Méthode des Différences Finies				
	Pas du maillage				
	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$	$h = 1/32$
m_{\max}	0.06452	0.07457	0.07756	0.07770	0.07770
ω_{\max}	0.00403	0.004260	0.00428	0.00428	0.00428

Lorsque nous combinons l'action de la flexion et de la traction bi axiale, l'écriture des **Équations (21), (22)** au nœud 22 en posant $\Delta m^{\xi} = \Delta m^{\eta} = \bar{\beta} = 0$; $P = \bar{\alpha} = \bar{\gamma} = 1$ et $k = -1$ en tenant compte des conditions aux limites et $h = 1/2$ prendra la forme:

$$-4m_{22} - 2\omega_{22} = -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4; \quad (36)$$

$$-4\omega_{22} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot m_{22}. \quad (37)$$

La résolution de ce système d'équations nous permet d'obtenir : $m_{22} = 0.0606$; $\omega_{22} = 0.00379$. Les résultats obtenus avec différentes valeurs du pas des maillages sont consignés dans le **Tableau 4**. Tout comme dans le cas précédent les solutions convergent. Cela démontre une fois de plus la stabilité de la méthode.

Tableau 4 : Valeurs des coefficients de moment fléchissant et de la flèche centre de la plaque

	Équations Généralisées de la Méthode des Différences Finies				
	Pas du maillage				
	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$	$h = 1/32$
m_{\max}	0.0606	0.0665	0.0689	0,0696	0,0697
ω_{\max}	0.00379	0.00382	0.00385	0.00386	0.00386

Examinons le cas d'une plaque rectangulaire dont les côtés sont a et b , tel que $a = 2b$. Les deux bords parallèles à l'axe η sont articulés, tandis que son bord gauche parallèle à l'axe ξ est encastré et le quatrième bord est libre. Une charge verticale est uniformément répartie sur toute sa surface de manière perpendiculaire à son plan moyen (**Figure 4**).

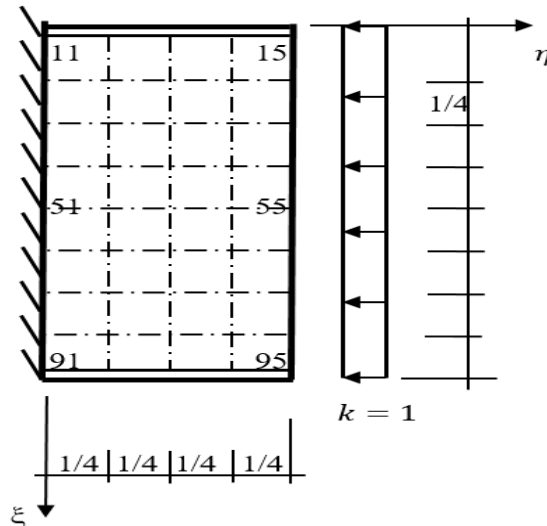


Figure 4 : Plaque carrée d'épaisseur constante articulée sur tous ses bords

Pour cet exemple la résolution des **Équations (21) et (22)** doit se faire en tenant compte des **Équations (24), (26), (27) et (28)**. Ces Équations doivent s'écrire pour un maillage quelconque en considérant que $v_0^{(\eta)} = m_{ij(0)}^{(\eta)} = 0$; $\Delta m^\xi = \Delta m^\eta = \bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{\gamma} = k = 0$; $P = 1$; $\mu = 0.3$. Les résultats obtenus sur les maillages $h = 1/4$, $h = 1/8$, $h = 1/16$ sont reportés dans le **Tableau 5**. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus dans [1, 11]. Pour $h = 1/16$ l'écart entre ces résultats est de 0.3 % pour le moment fléchissant et de 1.4 % pour la flèche maximale. Le moment est calculé au milieu du bord encastrement au nœud 51, tandis que la flèche est déterminée au milieu du bord libre au nœud 55.

Tableau 5 : Valeurs des coefficients de moment fléchissant au milieu du bord encastrement et de la flèche au milieu du bord libre

	Équations Généralisées de la Méthode des Différences Finies			[11]	[1]
	Pas du maillage				
	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$	$h = 1/8$	
$m_{\max}^{(\xi)}$	-0.304	-0.316	-0.320	-0.319	-0.319
ω_{\max}	0.0619	0.0590	0.0590	0.0581	0.0582

Considérons maintenant que la plaque de la **Figure 4** est chargée sur toute la longueur de son bord libre tel que l'indique la figure. Elle subit donc une flexion combinée à la compression. Dans ce cas le calcul se fera toujours avec les **Équations (21), (22)** en tenant compte des conditions aux limites **(24), (26), (27), (28)**. Par ailleurs $v_0^{(\eta)} = m_{ij(0)}^{(\eta)} = 0$, $\Delta m^\xi = \Delta m^\eta = \bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{\gamma} = 0$, $P = \bar{\alpha} = k = 1$, $\mu = 0.3$.

Tableau 6 : Valeurs des coefficients de moment fléchissant au milieu du bord encasté et de la flèche au milieu du bord libre

		Equations Généralisées de la Méthode des Différences Finies		
		Pas du maillage		
		$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$
Flexion / Compression	$m_{\max}^{(\xi)}$	-0.319	-0.334	-0.342
	ω_{\max}	0.0651	0.0632	0.0640
Flexion / Traction	$m_{\max}^{(\xi)}$	-0.290	-0.299	-0.302
	ω_{\max}	0.0590	0.0558	0.0552

Dans le cas d'une flexion combinée avec une traction, les hypothèses ci-dessus sont valables, dans ce cas $k = -1$. Les résultats obtenus dans les cas sont reportés dans le **Tableau 6**. Tout comme dans l'exemple précédent, ces résultats sont déterminés au milieu du bord encasté pour le moment m et au milieu du bord libre pour la flèche ω . Le **Tableau 6** montre que les solutions convergent très lentement, ceci du fait de la complexité des déformations sur le bord libre.

5. Conclusion

Au terme de ce travail nous avons réussi à transformer l'équation aux dérivées partielles d'ordre quatre en un système de deux équations aux dérivées partielles. Ensuite nous avons remplacé les paramètres des équations du système, ainsi que celles des conditions aux limites par des paramètres adimensionnels. Les équations ainsi obtenues ont été substituées par les équations généralisées de la méthode des différences finies. Ceci nous a permis d'obtenir des systèmes d'équations algébriques dont la résolution en tenant compte des conditions aux limites s'est effectuée à l'aide de la méthode itérative de Gauss-Seidel. Ce qui nous a permis d'éviter la formation préalable de matrice auprès des inconnues. L'algorithme développé ici est simple et a permis de résoudre les problèmes de calcul de six plaques minces isotropes d'épaisseur constante soumises à une flexion combinée à la compression et / ou traction. Différentes combinaisons des conditions aux limites les plus couramment rencontrées ont été examinées. Les résultats obtenus dans les différents exemples montrent une bonne convergence. Ce qui montre bien la stabilité de la méthode.

Références

- [1] - S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER "Theory of Plates and Shells". Ed. McGRAW-HILL, (1966)
- [2] - R. NZENGA, B. H. TAGNE, A two-dimensional model for linear elastic thick shells. *International Journal for Solids and Structures*, 3 (6) (1999) 5141 – 5176
- [3] - B. G. GALERKIN, "Elastic thin plates", Ed. Gostechizdat, Moscow, (1933) 371 p.
- [4] - P. M. VARVAK, "Development and application of the method of nets to the calculation of plates", Ed. Institute of Building Mechanics. part I, (1949) 136 p.
- [5] - B. Z. BLASSOV, N. N. LEONTIV, "Plates and shells on an elastic base", Ed. GIFML, Moscow, (1960) 208 p.
- [6] - N. N. LEONTIV, A. N. LEONTIV, D. N. SOBOLEV, N. N. ANOHIN, "Fundamentals of the theory of beams and plates on a deformed base", Ed. MISI, Moscow, (1982) 119 p.

- [7] - E. B. KORENEVA, “Analytical methods for calculating variable thickness plates and their practical applications”, *Ed. ABS publisher, Moscow, (2009) 238 p.*
- [8] - P. M. PINSKY, R. V. JASTI, A mixed finite element formulation for Reissner–Mindlin plates based on the use of bubble functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, (28) (1989) 1677 – 1702*
- [9] - D. J. ARGUIRIS, “Recent advances in methods for the calculation of structures from matrices”, Ed. Stroyizdat, Moscow, (1968) 241 p.
- [10] - C. A. IVANOV, Analysis of bent plates by the finite element method, *Ed Marsi, (4) (1972) 25 – 31*
- [11] - R. F. GABBASSOV, A. R. GABBASSOV, V. V. FILATOV, “Numerical construction of discontinuous solutions to the problems of constructive mechanics”, *Ed. ABC. Moscow, (2008) 277 p.*
- [12] - V. V. FILATOV, S. MOUSSA, About the Assessment of Deformability of Cross Braces when Designing Composite Plates according to the A. A. Rzhanytsyn’s Theory, *Ed. Industrial and Civil Engineering, (2) (2010) 28 – 29*
- [13] - R. F. GABBASSOV, S. MOUSSA, Generalized Equations of Finite Difference Method and their Application for Calculation of Variable Stiffness Curved Plates, *Ed. News of Higher Educational Institutions Construction, (5) (2004) 17 – 22*
- [14] - S. MOUSSA, F. LONTSI, H. OUMAROU, R. DANWE, Calculation of Plates on Elastic Foundation by the Generalized Equations of Finite Difference Method, *Ed. The International Journal of Engineering and Science, Vol. (7), issue (8), (2018) 32 – 38*
- [15] - S. MOUSSA, To the calculation of flexural plates of variable rigidity with edges free from fastening, *Ed. In the World of Scientific Discoveries, (2) (2010) 61 – 65*
- [16] - V. V. FILATOV, To the calculation of bending and compressed beams and plates on the non-homogenous foundation, Thesis of Ph.D. — Moscow, (2000) 160 p.
- [17] - KHADIDJA BENSELAMA, Détermination Des Charges Critiques De Flambement Des Plaques Composites, Thèse de Doctorat, Université DJILLALI LIABESSIDI BL ABBES, Alger, Algérie, (2016)
- [18] - N. BEZUKKOV, O. LUZHIN, N. KOLKUNOV, “Stability and dynamics of Structures learnt by example”, Ed. Viishaya Shcola, Moscow, (1990) 305 p.
- [19] - O. PANTALE, *Cours des plaques*, <https://fr.Slideshare.net/Vallverill/Coursplaques>, 20 avril 2019, 20h.
- [20] - La théorie des plaques à paroi mince Hypothèses, https://cours.et5mtl.ca/sys805/Documents/notes_de_cours/SYS846-Chap-2.pdf, (avril 2019)
- [21] - M. TEHANI, B. NASSER, A. MAHMOUDI, Etude sur le voilement des plaques minces, <http://www.entp.edu.dz/revue/files/article/38/article%207.pdf>, 21 avril 2019, 11h
- [22] - S. DRAPIER, Mécanique des structures et approximations numériques, (novembre 2017), https://www.emse.fr/~drapier/index_fichiers/CoursPDF/Meca-Structu2A/Meca-struct-num.pdf, (avril 2019)