*Afrique* SCIENCE *16(1) (2020) 174 - 191*
ISSN 1813-548X, http://www.afriquescience.net


# Optimisation par Karush-khun-tuker (K.K.T) du fonctionnement des deux génératrices différentes alimentant une charge commune

**Aristol TSIMA[1*], Max ANDRIANANTENAINA[1], Rabe TSIROBAKA[1] et Charles Bernard ANDRIANIRINA[2]**

[1] *Université d'Antsiranana, École Doctorale Thématique Énergies Renouvelables et Environnement (EDT ENRE), BP0 Antsiranana 201, Madagascar*
[2] *Université de Mahajanga, Institut Supérieur des Sciences et Technologies, Bâtiment Ex-LOLO Mahajanga-be, Madagascar*

* Correspondance, courriel : *art.tsima@yahoo.fr*

## Résumé

L'objectif principal de cetarticle est l'optimisation les points de fonctionnement d'un système énergétique qui constitué par une génératrice asynchrone et couplé avec une génératrice synchrone, l'ensemble est alimenté une charge. Pour résoudre le problème, on a adopté la méthode deKarush-khun-Tuker (K.K.T) et celui de Point intérieur pour la comparaison. Cette méthode utilise principalement la fonction de Lagrange, Jacobienne et la Hessienne. La première étape est la modélisation: la mise en équation de phénomène physique de système énergétiqueen tenant comptedes hypothèses simplificatrices. La seconde est l'utilisation des méthodes de résolution. Un programme de calcul a été élaboré, et choisissant les conditions initiales, pour tracer et visualiser les allures des courbes des paramètres, des points de fonctionnement et des multiplicateurs de Lagrange. L'étude était consacrée sur deux types de système: un système simplifié qui compose par une génératrice asynchrone et une charge, et un système composé par une génératrice asynchrone, charge et une génératrice synchrone. Les systèmes ne contiennent pas des matériels électroniques. Le point de fonctionnement pour la puissance optimale de la charge est obtenu à partir des applications des conditions d'optimalité de Karush-Khun-Tukeret de l'étude de la représentation des allures des courbes.

**Mots-clés :** *optimisation, génératrice asynchrone, synchrone, éolienne, karush-kuhn-Tuker.*

## Abstract

**Optimization by Karush-Khun-Tuker (K.K.T) of the operation of two different generators feeding a common load**

The main objective of this article is the optimization of the operating points of an energy system which constituted by an asynchronous generator and coupled with a synchronous generator, the whole is supplied with a load. To solve the problem, we adopted the Karush-khun-Tuker (K.K.T) method and that of Inner Point for comparison. This method mainly uses the Lagrange, Jacobian and Hessian function. The first step is modeling: the equation of the physical phenomenon of the energy system taking into account simplifying assumptions. The second is the use of resolution methods. A calculation program has been developed, and choosing the initial conditions, to plot and visualize the paces of the curves of the parameters, the operating

points and the Lagrange multipliers. The study was devoted to two types of system: a simplified system which composes by an asynchronous generator and a load, and a system composed by an asynchronous generator, charge and a synchronous generator. The systems do not contain electronic equipment. The operating point for the optimal power of the load is obtained from the applications of the conditions of optimality of Karush-Khun-Tuker and the studies of the representation of the paces of the curves.

**Keywords :** *optimization, asynchronous generator, synchronous, wind turbine, Karush-kuhn-Tuker.*

**Nomenclature**

***Lettres latines***

| | |
|---|---|
| $E_{fd}$: | Tension d'excitation |
| Ep: | Tension interne de la machine Asynchrone |
| Eq: | Tension interne de la machine Synchrone |
| $E_t$: | Tension terminale. |
| $E'_q$: | Tension proportionnelle à la composante directe |
| GL: | Angle de charge |
| Gm: | Angle de la machine asynchrone |
| Gm2: | Angle de la machine synchrone |
| $K_A$, $T_A$: | Gain et constante de temps du régulateur de tension |
| $K_E$, $T_E$: | Paramètres de l'excitateur |
| $r_r$: | Résistance rotorique |
| $r_s$: | Résistance statorique |
| PL: | Puissance active au borne de la charge |
| QL: | Puissance réactive au borne de la charge |
| $T_{ei}$: | Couple électrique |
| $T_{mi}$: | Couple mécanique |
| $T'_{oi}$: | Constante de temps |
| $T'_{d0}$: | Constante de temps transitoire du circuit |
| VL: | Valeur efficace de la tension aux bornes de la charge |
| $V_{ref}$: | Tension de référence |
| $V_s$: | Signal supplémentaire |
| Wr: | Vitesse de rotation de la machine Asynchrone |
| $X_{ri}$: | Réactance rotorique |
| $X_{si}$: | Réactance statorique |
| $X_{mi}$: | Réactance magnétisante |
| $X_d$: | Composante directe de la réactance statorique en pu |
| $X_q$: | Composante quadrature de la réactance statorique en p.u |

***Lettres grecques***

| | |
|---|---|
| $\alpha_p$: | Variable primal |
| $\alpha_d$: | Variable dual |
| $\mathcal{L}$: | Fonction de Lagrange |
| $\psi_{fd}$: | flux rotorique directe |
| $\delta,\beta$: | Vecteurs variables d'écart |
| $\lambda,\sigma$: | Vecteurs de multiplicateur de Lagrange |
| $\mu$: | Paramètre barrière |

***Indices/Exposants***

| | |
|---|---|
| L: | Charge |
| d: | Directe |
| q: | Quadrature |
| r: | Rotor |
| s; | Stator |

## 1. Introduction

La plupart d'énergies électriques utilisées sont des sources thermiques. Ces centrales dites usuelles fonctionnent à l'aide des carburants, cependant elles polluent l'environnement, voire la nature : des

dégradations de couche d'ozone, et le réchauffement et perturbation climatiques. Ainsi l'énergie électrique est un facteur essentiel pour le développement et l'évolution des sociétés humaines quant à l'amélioration des conditions de vie, et des activités industrielles. Par ailleurs l'énergie éolienne est aujourd'hui la source renouvelable non conventionnelle très compétitive et qui a le taux de croissance le plus élevé [2]. Elle représente déjà une des formes d'énergie renouvelable les plus importantes pour la production d'énergie électrique. De ce fait, l'électricité produite par l'énergie du vent dans le monde est obtenue par les grandes fermes éoliennes, ou par des petits systèmes de conversion d'énergie éolienne. Le potentiel d'énergie du vent à Madagascar est très élevé mais non encore exploité. Face au délestage, le recours à cette exploitation d'énergie électrique s'avère un moyen efficient pour lutter contre pénurie des carburants, d'où l'idée d'associer les centrales thermiques avec l'énergie éolienne à génératrice asynchrone moins onéreuse. Quant au bon rendement d'un système énergétique, l'optimisation de la puissance est de recours. Par ricochet, cet article présente la recherche d'un point de vue fonctionnement qui a une puissance maximale d'un système énergétique a deux génératrices différentes alimentant une charge commune. La réalisation de ce travail doit passer par des équations modélisantes du système et utilisation de la méthode de KarushKuhn Tucker (K.K.T) en comparant avec méthode de Newton.

## 2. Méthodologie

L'étude de l'optimisation pour une fonction donnée est la recherche de minimum ou de maximum de cette fonction dite une fonction objectifs définie sur un ensemble quelconque et en appliquant une méthode adéquate. Optimiser c'est choisir parmi plusieurs possibilités celle qui répond le mieux à certains critères [3]. Conformément au problème poser, on utilise ici la forme générale, donc appliquons la formule où il y a des fonctions des contraintes d'égalité ou d'inégalité, on introduit des multiplicateurs de Lagrange et des variables de système.

### 2-1. Énoncé de la méthode

Le problème d'optimisation de Karush-Kuhn-Tucker est définie par : $\max f(x)$

Avec des contraintes d'égalité et inégalité :
$$\begin{aligned} g_i(x) &= 0 \text{ pour } i = 1, \dots \dots, m \\ h_j(x) &\leq 0 \text{ pour } j = 1, \dots \dots, p \\ \mu_j h_j(x) &= 0 \text{ pour} j = 1, \dots \dots, p \end{aligned} \tag{1}$$

$\lambda_i, \mu_j$ : *Multiplicateurs de Lagrange généralisés.*

### 2-2. Définitions

- Lorsque toutes les applications sont différentiables, le lagrangien en $x \in \mathbb{R}^n$ est donné par [4, 19] :

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_i h_j(x) \tag{2}$$

- Le vecteur gradient est obtenu à partir de la ***Formule*** suivante :

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(x) \tag{3}$$

- On définit aussi, lorsque les applications sont deux fois différentiables, la matrice Hessienne du lagrangien en $x \in \mathbb{R}^n$, par [24] :

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla^2 g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla^2 h_j(x) \quad (4)$$

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x,\lambda) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j}(x,\lambda)\right)_{\substack{i=1....n \\ j=1....n}} = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla^2 g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla^2 h_j(x) \quad (5)$$

C'est une matrice symétrique car : $\partial^2 \mathcal{L}(x)/\partial x_i \partial x_j = \partial^2 \mathcal{L}(x)/\partial x_j \partial x_i$

### 2-3. Conditions de Karush-Kuhn-Tucker

Le point optimum est obtenu par les deux conditions suivantes :

- ✓ **1ere condition**

u est solution de ***L'Équation (2)*** si : $\exists \lambda_1 \ldots\ldots \lambda_p, \mu_1 \ldots. \mu_q$ tels que [18] :

$$*\forall i = 1, \ldots\ldots, m, g_i(u) = 0; \quad (6)$$

$$*\forall j = 1, \ldots\ldots, p, h_j(u) \leq 0; \quad (7)$$

$$*\forall j = 1, \ldots\ldots, p, \ \mu_j \geq 0; \quad (8)$$

$$*\forall j = 1, \ldots\ldots, p, \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(u) = 0; \quad (9)$$

$*\nabla_x \mathcal{L}(u,\bar{\lambda},\bar{\mu}) = 0.(u,\bar{\lambda},\bar{\mu})$ est la solution de ***L'Équation (2)***. (10)

- ✓ **2eme condition**

Le point $(u,\bar{\lambda},\bar{\mu})$ est l'optimum par K.K.T si la matrice :

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(u,\bar{\lambda},\bar{\mu}) > 0 \quad (11)$$

Les équations de Karush-Kuhn-Tucker sont des conditions d'optimalité seulement, pour résoudre et trouver les solutions optimales, il faut utiliser une méthode de résolution.

### 2-4. Méthode de Newton

Pour la résolution des systèmes d'équations non-linéaires, on préfère la *méthode de Newton* [17], dont nous décrivons brièvement le principe :

Soit : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ , une fonction non linéaire différentiable. La méthode de Newton est une procédure itérative qui a pour objectif de trouver un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que:

$$F(x) = 0. \quad (12)$$

Pour chaque itéré $x^{(k)}$, la méthode calcule une approximation du premier ordre (linéaire) de *F* autour de $x^{(k)}$ et définit l'itéré suivant $x^{(k+1)}$ comme le zéro de cette approximation linéaire. Si *J* est la matrice Jacobienne de *F* (que l'on suppose ne pas être singulière), on écrit :

$$F\left(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}\right) \approx F\left(x^{(k)}\right) + J(x^{(k)})\Delta x^{(k)} \quad (13)$$

et le pas de Newton $\Delta x^k$ est choisi de telle sorte que cette approximation linéaire est égale à zéro : on pose donc

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{k} \text{avec } \Delta x^{(k)} = -J\left(x^{(k)}\right)^{-1} F(x^{(k)}) \quad (14)$$

Le calcul de $\left(x^{(k)}\right)$ est généralement effectué en pratique via la résolution du système linéaire :

$$J(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}) \quad (15)$$

Plutôt qu'en évaluant explicitement l'inverse de $J(x^{(k)})$. La convergence vers une solution est garantie à partir du moment où l'itéré initial $x^{(0)}$ se trouve dans un voisinage suffisamment proche d'un des zéros de *F*. Les calculs s'arrêtent lorsque :

$$\left|\Delta x^{(k+1)}\right| \leq \in \quad (16)$$

### 2-5. Méthode de point intérieur

Tout problème d'optimisation s'écrit, généralement, de la façon suivante : $\min \ \ f(x)$

Sous contrainte $g(x) = 0$

$\underline{M} \leq M(x) \leq \overline{M}$ Valeur limites des grandeurs variables liées aux paramètres

$\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$ Valeurs limites des paramètres

On transforme généralement le problème dual par l'introduction de variables supplémentaires appelées variables d'écart (*slacks* en anglais) afin de remplacer les contraintes d'inégalité par des contraintes d'égalité [23].

$\min \ \ f(x)$

Sous contrainte

$$g(x) = 0$$
$$M(x) - \underline{M} - \delta = 0$$
$$\overline{M} - M(x) - \beta = 0$$

$\delta > 0 \, , \beta > 0$

#### *2-5-1. Fonctions barrières*

Un paramètre barrière associé au problème $\mu \in \mathbb{R}^{+}$ est un réel positif (Le logarithme y joue un rôle important). Il est important de réaliser que la méthode barrière fut développée pour résoudre des problèmes non linéaires. À l'aide de cette fonction, appliquons au problème d'optimisation [16] on a :

$\min f(x) - \mu(\sum_{i=1}^{m}(\ln \delta[i] + \ln \beta[i]))$

Sous contrainte $g(x) = 0$

$$M(x) - \underline{M} - \delta = 0$$
$$\overline{M} - M(x) - \beta = 0$$
$$\delta > 0, \beta > 0$$

Le rôle du terme barrière ajouté consiste à tenir les itérés, générés par une méthode d'optimisation pour problèmes sans contraintes, éloignés de la zone non admissible.

### *2-5-2. Méthode avec fonction de lagrangien*

On cherche le lagrangien à partir de la ***Formule*** ci-dessous :

$$L_\mu = f(x) - \mu\left(\sum_{i=1}^{m}(\ln\delta[i] + \ln\beta[i])\right) - \lambda_1^T g_i(x) - \sigma_1^T\left(M(x) - \underline{M} - \delta\right) - \sigma_2^T\left(\overline{M} - M(x) - \beta\right) \quad (17)$$

*Où* $z = [\delta, \beta, \lambda_1, \sigma_1, \sigma_2, x]$

$\lambda_1, \sigma_1, \sigma_2$ Sont des vecteurs de multiplicateur de Lagrange

Les conditions de Karuch-Kuhn-Tucker sont des conditions nécessaires d'optimalité valables dans le cas très général de l'optimisation non linéaire sous contraintes avec objectif différentiable. On applique la première condition de K.K.T [4, 11] :

$$\nabla L_\mu(x) = 0$$

$$\nabla L_\mu(x) = \begin{bmatrix} \nabla_\delta L_\mu(x) \\ \nabla_\beta L_\mu(x) \\ \nabla_{\sigma_1} L_\mu(x) \\ \nabla_{\sigma_2} L_\mu(x) \\ \nabla_{\lambda_1} L_\mu(x) \\ \nabla_x L_\mu(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu\delta^{-1}e + \sigma_1 \\ -\mu\beta^{-1}e + \sigma_2 \\ -\left(M(x) - \underline{M} - \delta\right) \\ -\left(\overline{M} - M(x) - \beta\right) \\ -g(x) \\ \nabla f(x) - \nabla g(x)\,\lambda_1^T - \nabla M(x)(\sigma_1^T - \sigma_2^T) \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

*Où* $e = [1, \dots\dots, 1]^T$ *est un vecteur unitaire,* $\delta = diag(\delta_1, \dots\dots\dots, \delta_2)$ *et* $\beta = diag(\beta_1, \dots\dots\dots, \beta_2)$ *sont les vecteurs variables d'écart (slacks vectors)*

Pour avoir un nouvel itéré, l'un des moyens est d'utiliser la méthode de Newton, c'est-à-dire pour chaque $> 0$ , on résout le système d'équations linéaires à partir de la ***Formule*** suivante, et on obtient un nouvel pas de NEWTON :

$$\begin{bmatrix} \mu\delta^{-2} & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu\beta^{-2} & 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla M(x) \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & \nabla M(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla g(x) \\ 0 & 0 & -\nabla M(x)^T & \nabla M(x)^T & -\nabla g(x)^T & \nabla_X^2 L_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_\delta \\ \Delta_\beta \\ \Delta_{\sigma_1} \\ \Delta_{\sigma_2} \\ \Delta_{\lambda_1} \\ \Delta_X \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \nabla_\delta L_\mu(x) \\ \nabla_\beta L_\mu(x) \\ \nabla_{\sigma_1} L_\mu(x) \\ \nabla_{\sigma_2} L_\mu(x) \\ \nabla_{\lambda_1} L_\mu(x) \\ \nabla_x L_\mu(x) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\nabla_x^2 L_\mu = \nabla_x^2 f(x) - \nabla_x^2 g(x)\lambda_1^T - \nabla_x^2 M(x)(\sigma_1^T - \sigma_2^T) \quad (20)$$

On réduit les équations en deux équations pour facile de calculer les éléments de NEWTON, on tire par la ***Formule (19)*** les variables $\nabla_{\lambda_1}$ et $\nabla_x$ .

$$\begin{bmatrix} 0 & -\nabla g(x) \\ -\nabla g(x)^T & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda_1 \\ \Delta_X \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \nabla_{\lambda_1} L_\mu \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (21)$$

*Où les éléments de la matrice réduit* $\gamma$ *et* $\varphi$ *sont données par les* ***Formules*** *suivantes :*

$$\gamma = \nabla_x^2 L_\mu + \mu\nabla_x M(x)^T(\delta^{-2} + \beta^{-2})\nabla_x M(x)\,( \quad (22)$$

$$\varphi = \nabla_x L_\mu + \nabla_x M(x)^T[\mu(\beta^{-2}\nabla_{\sigma_2} L_\mu - \delta^{-2}\nabla_{\sigma_1} L_\mu) + \nabla_\delta L_\mu - \nabla_\beta L_\mu] \quad (23)$$

Les variations des autres paramètres sont obtenues par les ***Formules*** suivantes:

$$\Delta_\delta = \nabla M(x)\Delta x - \nabla_{\sigma_1} L_\mu \quad (24)$$

$$\Delta_\beta = -\nabla M(x)\Delta x - \nabla_{\sigma_2} L_\mu \quad (25)$$

$$\Delta_{\sigma_1} = -\mu\delta^{-2}\Delta_\delta - \nabla_\delta L_\mu \quad (26)$$

$$\Delta_{\sigma_2} = -\mu\delta^{-2}\Delta_\beta - \nabla_\beta L_\mu \quad (27)$$

On utilise des longueurs de pas différentes pour les itérés primaux et duaux

$$\delta^{k+1} = \delta^k + \alpha_p^k \Delta\delta^k \quad (28)$$

$$\beta^{k+1} = \beta^k + \alpha_p^k \Delta\beta^k \quad (29)$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p^k \Delta x^k \quad (30)$$

$$\sigma_1^{k+1} = \sigma_1^k + \alpha_d^k \Delta\sigma_1^k \quad (31)$$

$$\sigma_2^{k+1} = \sigma_2^k + \alpha_d^k \Delta\sigma_2^k \quad (32)$$

$$\lambda_1^{k+1} = \lambda_1^k + \alpha_d^k \Delta \lambda_1^k \quad (33)$$

*Où* $\alpha_p \in [0,1]$ *est variable primal,* $\alpha_d \in [0,1]$ *est le variable dual.*

Le choix du coefficient, déterminant la taille du pas de Newton que l'on prend à l'itération k, on autorise des longueurs de pas différents pour les deux variables pour corriger les variables primales et duales, elles sont obtenues à partir des ***Formules*** suivantes :

$$\alpha_p^k = \min\left[1, \tau * min \frac{-\delta_i^k}{\Delta\delta_i^k} : \Delta\delta_i^k < 0\right] \quad (34)$$

$$\alpha_d^k = \min\left[1, \tau * min \frac{-\sigma_i^k}{\Delta\sigma_i^k} : \Delta\sigma_i^k < 0\right] \quad (35)$$

*Avec* $\tau \in [0,1]$, $\tau$ *peut être donner à une valeur de* $\tau = 0.99995$. *On estime une bonne valeur de* $\mu$ *(ni trop grande, ni trop petite)[16]. La valeur initiale de barrière est de* $\mu = \mu_0$. *Tant que* $\mu \geq \varepsilon$, *on calcule* $Z = Z + \Delta Z$

On autorise des longueurs de pas différents pour le primal et le dual. Ceci implique donc le calcul de deux valeurs de $\alpha_p^k$ et $\alpha_d^k$ pour obtenir le nouvel itéré. Ils sont choisis pour accélérer la convergence dans la direction de recherche [17]. On peut appliquer aussi dans les calculs.

$$\alpha_p^k = \alpha_d^k = min\{\alpha_p^k, \alpha_d^k\} \quad (36)$$

Les méthodes de point intérieur proposent la modification des conditions d'optimalité K.K.T durant le processus de convergence.

### *2-5-3. Critère d'arrêt*

Le critère d'arrêt devrait être relié à la satisfaction des conditions d'optimalité. L'itération, le calcul de recherche de la valeur optimale s'arrêtent lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$\left|\Delta \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}\right| \leq \in \tag{37}$$

Un paramètre de tolérance $\varepsilon$ est un nombre strictement positive et petit, qui représente un niveau de tolérance admis, à fixer au début.

## 2-6. Modélisation des systèmes

L'objectif de la modélisation des systèmes est d'établir un modèle fiable et avec précision. En effet, il n'a nullement besoin de recourir aux commandes mécaniques et électronique en admettant des hypothèses simplifiées. Ainsi, il représentera le fonctionnement de la machine.

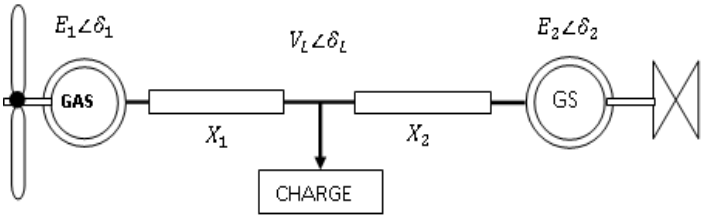


**Figure 1 :** *Système énergétique*

### *2-6-1. Hypothèses simplificatrices*

Pendant cette étude il est important d'appliquer les hypothèses suivantes [2]:

- La fréquence reste constante ;
- Les lignes de transport sont représentables par des circuits en $\pi$ ;
- Le comportement du réseau triphasé est équilibré ;
- Nous admettons que les charges alimentées par le réseau sont toutes passives et linéaires, assimilables à des impédances ;
- Les éléments du réseau ne présentent pas entre eux d'impédance mutuelle. Pour pouvoir établir les équations régissant sur le fonctionnement d'une machine asynchrone, et synchrone, on va adopter les hypothèses suivantes :
- La force magnétomotrice créée par chacune des phases des armatures est à répartition sinusoïdale ;
- L'entrefer est d'épaisseur uniforme et l'effet d'encochage est négligé ;
- Les résistances ne varient pas avec la température et on néglige l'effet de peau ;
- L'effet des amortisseurs dans le rotor est négligé [10] ;
- Les termes dérivatifs $p\psi_p$ et $p\psi_q$ sont négligés du modèle du stator car ces termes décroissent très rapidement [10] ;
- La saturation, l'hystérésis et les courants de Foucault sont négligeables ;
- L'effet de la variation de la vitesse est négligé. Cette simplification est basée sur l'idée que la vitesse $r\omega$ en p.u égale à 1. Cela ne signifie pas que la vitesse est constante mais la variation est très petite et n'ont aucun effet sur la tension au stator [10, 14, 15].

### *2-6-2. Modèle des composantes de systèmes étudié*

Pour simplifier l'étude, on adopte la configuration suivante, c'est à dire il faut une machineasynchrone, une machine synchrone aussi et une charge commune.

2-6-2-1. Modèle des machines

*2-6-2-1-1. Modèle en 3eme ordre de la machine asynchrone*

Les équations dynamiques en 3eme ordre régissant la génératrice asynchrone sont obtenues de l'équation d'état de la f.e.m, l'angle interne et de la pulsation. Le modèle en générateur synchrone équivalent de la machine asynchrone est donné par les ***Formules*** [7, 8, 13] :

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{1}{2H_{G_i}}\left[T_{m_i} - T_{e_i}\right] \quad (38)$$

$$\frac{dE'_{qr_i}}{dt} = -\frac{1}{T'_{o_i}}\left[E'_{qr_i} - (X_i - X'_i)i_{ds_i}\right] - S_i\omega_s E'_{dr_i} \quad (39)$$

$$\frac{dE'_{dr_i}}{dt} = -\frac{1}{T'_{o_i}}\left[E'_{dr_i} - (X_i - X'_i)i_{qs_i}\right] + S_i\omega_s E'_{qr_i} \quad (40)$$

Avec

$$V_{ds_i} = R_{s_i}i_{ds_i} - X'_i i_{qs_i} + E'_{dr_i}\ ;\ V_{qs_i} = R_{s_i}i_{ds_i} - X'_i i_{qs_i} + E'_{qr_i};\ V_{t_i} = \sqrt{V_{ds_i}^2 + V_{qs_i}^2}$$

$$X'_i = X_{s_i} + X_{m_i}X_{r_i}/(X_{m_i} + X_{r_i});\ X_i = X_{s_i} + X_{m_i};\ T'_{o_i} = \left(L_{r_i} + L_{m_i}\right)/R_{r_i}$$

$$T_{e_i} = E_{dr_i}i_{ds_i} + E_{qr_i}i_{qs_i} \quad (41)$$

$$I_{di} = \sum_{j=1}^{n}\left[E'_{drj}\left(G_{ij}\cos\delta_{ji} - B_{ij}\sin\delta_{ji}\right) + E'_{qrj}(G_{ij}\sin\delta_{ji} + B_{ij}\cos\delta_{ji})\right] \quad (42)$$

$$I_{qi} = \sum_{j=1}^{n}\left[E'_{drj}\left(G_{ij}\cos\delta_{ji} - B_{ij}\cos\delta_{ji}\right) + E'_{qrj}(G_{ij}\cos\delta_{ji} + B_{ij}\sin\delta_{ji})\right] \quad (43)$$

Pour les calculs, Il faut transformer les équations en coordonnée polaire.

*2-6-2-1-2. Modèle en 3eme ordre de la génératrice synchrone*

Les équations de la machine synchrone sont obtenues par les ***Formules*** :

$$\frac{d\delta_i}{dt} = w_i \quad (44)$$

$$\frac{dw_i}{dt} = -D_i w_i + P_i - G_{ii}E_i^2 - E_i\sum_{j\neq i}^{n} E_j Y_{ij}\sin(\delta_i - \delta_j + \propto_{ij}) \quad (45)$$

$$\frac{dE'_q}{dt} = -a_i E_i + b_i\sum_{i\neq i}^{n} E_j\cos\left(\delta_i - \delta_j + \alpha_{ij}\right) + E_{fi} + u_i \quad (46)$$

*2-6-2-1-3. Modèle d'excitation*

Les équations suivantes sont des ***Formules*** de modèle d'excitation [2] :

$$\frac{dE_{fd}}{dt} = \frac{1}{T_E}(V_A - K_E E_{fd}) \quad (47)$$

$$\frac{dV_A}{dt} = \frac{1}{T_A}(-K_A V_F - K_A V - V_A) \quad (48)$$

$$\frac{dV_F}{dt} = \frac{1}{T_F}\left(K_F \frac{dE_{fd}}{dt} - V_F\right) \quad (49)$$

où : $V = V_{ref} + V_s - E_t$ (50)

On peut simplifier les équations d'excitation en un système de 1 er ordre [2] :

$$\frac{dE_{fdi}}{dt} = \frac{K_{Ai}}{T_{Ei}+K_{Ai}K_{Fi}}(V_{refi} + V_{Si} - E_{ti}) - \frac{K_{Ei}}{T_{Ei}+K_{Ai}K_{Fi}} E_{fdi} \quad (51)$$

2-6-2-2. Modèle de puissance au nœud

Les modèles de la Puissance active et de réactive injectées au nœud i sont trouvées à partir des ***Formules*** suivantes [6, 9] :

$$P_i = V_i^2 Y_{ii} - V_i \sum_{k\neq i}^{m} V_k[g_{ik}\cos(\theta_i - \theta_k) + b_{ik}\sin(\theta_i - \theta_k)] \quad (52)$$

$$Q_i = -V_i^2 X_{ii} - V_i \sum_{k\neq i}^{m} V_k[g_{ik}\sin(\theta_i - \theta_k) + b_{ik}\cos(\theta_i - \theta_k)] \quad (53)$$

*$P_i$: Puissance active au nœud i; $Q_i$: Puissance réactive au nœud i; $\theta_i$,$\theta_k$: sont les déphasages respectives de $V_i$; $V_k$.*

2-6-2-3. Turbine (GAS)

Les modèles de la turbine sont obtenues par les ***Formules*** suivantes [20, 25] :

$$\dot{w}_t = \frac{1}{2H_t}(T_t - K_s\theta - D_t w_t) \quad (54)$$

$$\dot{w}_s = \frac{1}{2H_g}(K_s\theta - T_e - D_g w_r) \quad (55)$$

$$\dot{\theta} = w_b(w_f - w_r) \quad (56)$$

2-6-2-4. Modèle de charge

Précisons qu'actuellement, les organismes tel l'IEEE travaillant dans le domaine de l'électricité, n'ont pas encore tranché sur le modèle universel de charge, d'autant plus qu'on se trouve face à des modifications des comportements de celle-ci à divers moments de la journée, s'il est question d'étudier une localité comportant plusieurs abonnés.

*2-6-2-4-1. Modèle de charge statique*

- *Modèle ZIP Polynomial [ZIP]*

Le modèle polynomial exprime la puissance consommée par la charge comme un polynôme de degré 2 (en général) de la tension. Les expressions des puissances actives et réactives sont données par les ***Formules*** suivantes :

$$P_L = a_0 + a_1 V_L + a_2 V_L^2 \quad (57)$$

$$Q_L = b_0 + b_1 V_L + b_2 V_L^2 \quad (58)$$

➢ *Modèle Exponentiel*

Le modèle exponentiel exprime la puissance consommée comme une fonction exponentielle de la tension. En grandeurs réelles on a pour la puissance active et réactive :

$$P_L = P_0 \left(\frac{V_L}{V_0}\right)^{\propto} Q_L = Q_0 \left(\frac{V_L}{V_0}\right)^{\beta} (\alpha, \beta \in R) \quad (59)$$

$$P_L = P_0 (V_L)^{\propto} Q_L = Q_0 (V_L)^{\beta} \quad (60)$$

Le modèle exponentiel est un artifice mathématique pour alléger l'expression de la puissance, et même si ce modèle est validé par des mesures.

*2-6-2-4-2. Modèle de charge dynamique*

➢ *Recouvrement exponentiel*

Selon ce modèle, la puissance demandée par la charge suit à un saut négatif de la tension entraine un saut négatif d'une valeur $P_s(V_0)$ vers une valeur $P_t(V_1)$. Ainsi, il a une augmente exponentiellement vers une valeur $P_s(V_1)$ inférieure ou égale à $P_s(V_0)$. De ce fait, cette description justifie l'appellation modèle à recouvrement exponentiel.

$$X_p = P_d - P_t \quad (61)$$

$$T_P \dot{X}_P = -X_P + P_s(V_L) - P_t(V_L), \quad (62)$$

$$P_s(V_L) = P_0 V_L^{\alpha_s} \quad (63)$$

$$P_t(V_L) = P_0 V_L^{\alpha_t} \quad (64)$$

$$P_d = X_p + p_t(V_L) = X_p + p_0 V_L^{\alpha t} \quad (65)$$

➢ *Mixte et généralisé*

- *Modèle générale*

Une forme générale de la puissance active et réactive (en p.u) consommée est proposée par CANIZARES (Condition for saddle node bifurcation in AC/DC power system) :

$$P_L = p_0 + p_1 V_L + p_2 V_L^2 + D_p(\dot{\theta}_L - w_s) + K_p \dot{V}_L \quad (66)$$

$$Q_L = q_0 + q_1 V_L + q_2 V_L^2 + D_q(\dot{\theta}_L - w_s) + K_q \dot{V}_L \quad (67)$$

- *Modèle WALVE*

On peut utiliser le modèle mixte de WALVE, traduisant le comportement d'une charge constante en parallèle avec une machine asynchrone équivalente à l'ensemble des moteurs électriques que comporte la charge.

$$P_L = p_c + p_0 + p_1 \dot{\delta}_L + p_2 \dot{V}_L + p_3 V_L \quad (68)$$

$$Q_L = q_c + q_0 + q_1 \dot{\delta}_L + q_2 \dot{V}_L + q_3 V_L \quad (69)$$

## 2-7. Condition complémentaire

Les contraintes de l'inégalité de l'écoulement de puissance reflètent les limites sur les paramètres physiques du système de puissance et de tension pour assurer la sécurité du système. Les équations d'égalité et

d'inégalité sont suivantes [5, 11, 23] :

Equilibre de puissance entre la production et la demande

$$PG_{imin} \leq PG_i \leq PG_{imax} \tag{70}$$

Le contrôle de la puissance réactive

$$QG_{imin} \leq QG_i \leq QG_{imax} \tag{71}$$

Il doit avoir des limites tolérées sur la tension pour éviter l'existence des pertes des puissances

$$V_{imin} \leq V_i \leq V_{imax} \tag{72}$$

Les équations d'inégalités sont transformées en équations d'égalités suivantes en utilisant le variable de *slacks* :

$$PG_i - PG_{imin} + SPG_{imin} = 0 \tag{73}$$

$$PG_{imax} - PG_i + SPG_{imax} = 0 \tag{74}$$

$$QG_i - QG_i + SQG_{imin} = 0 \tag{75}$$

$$QG_{imax} - QG_i + SQG_{imax} = 0 \tag{76}$$

$$V_i - V_{imin} + SV_{imin} = 0 \tag{77}$$

$$V_{imax} - V_i + SV_{imax} = 0 \tag{78}$$

## 3. Résultats et discussion

La recherche de la valeur optimale consiste à calculer la valeur maximale ou minimale à l'aide d'une méthode de calcul avec une alternative de recours à l'application de la variation de condition de K.K.T ou inversement. Lors d'incrémentation d'un paramètre, le système passe directement d'un état permanent à l'autre, on détermine le point d'effondrement (point de charge maximale), ou la valeur maximale du paramètre suite au changement de comportement du système. On divise les résultats en deux parties, les résultats obtenue avec système réduit ***(Figure 2)*** et les résultats pour le système complet ***(Figure 1).***

### 3-1. Première partie

Dans cette partie, nous allons élaborer un modèle d'un système de production à fin de déterminer la puissance qu'ils peuvent supporter avant de changement de comportement, c'est la puissance maximale.

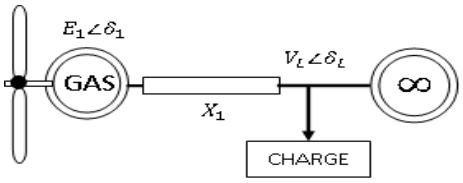


**Figure 2 :** *Système réduit étudié*

A partir des calculs, l'utilisation des programmes, on obtient les courbes suivantes :

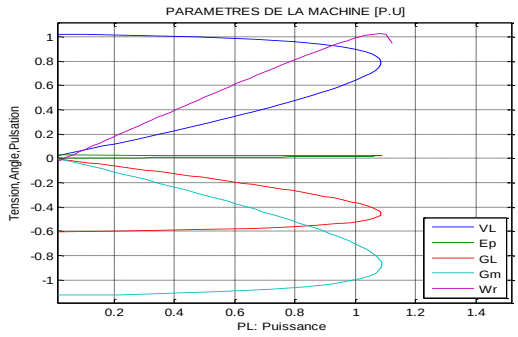


**Figure 3 :** *Courbes des Paramètres*

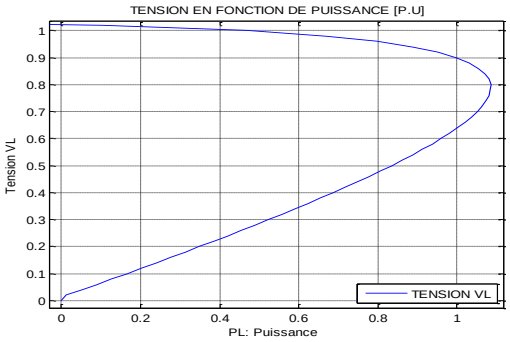


**Figure 4 :** *Allure de Tension*

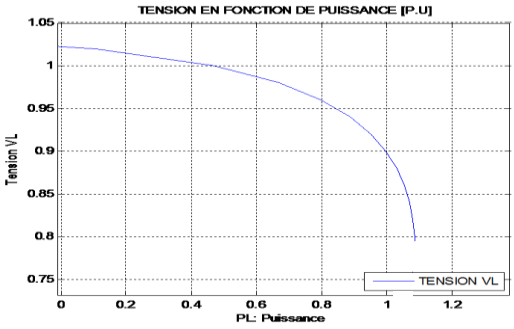


**Figure 5 :** *Tension avec condition*

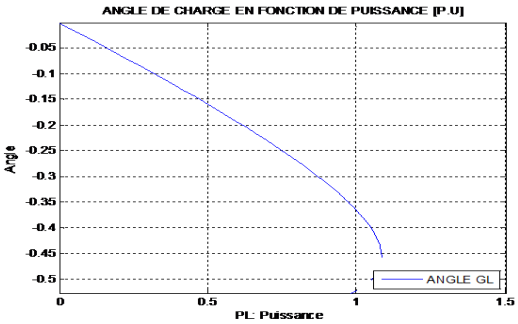


**Figure 6 :** *Allure de l'Angle de charge*

Après l'application de la méthode de newton, les ***Figures 3 - 6*** représentent les solutions du système en fonction de puissance de la charge (***Figure 3 et 4*** sans conditions aux limites de sécurité et ***Figure 5 et 6*** avec conditions). Connaissant l'état initial du système, on peut donc prédire son évolution future, on a obtenue des courbes, qui changent des comportements entres les valeurs des puissances $p = 1$ et $p = 1.1$ [p.u], elles ont des tangentes verticale, ce qui limite la valeur de la charge acceptable pour le fonctionnement de ce système. En régime dynamique, en fonctionnement de point optimal, La machine asynchrone doit tourner à une vitesse supérieure à la vitesse de synchronisme pour qu'il fonctionne en génératrice. On a la courbe de la ***Figure 7*** ci-dessous :

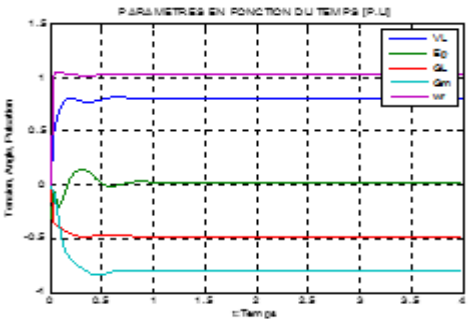


**Figure 7 :** *Paramètre en fonction du temps*

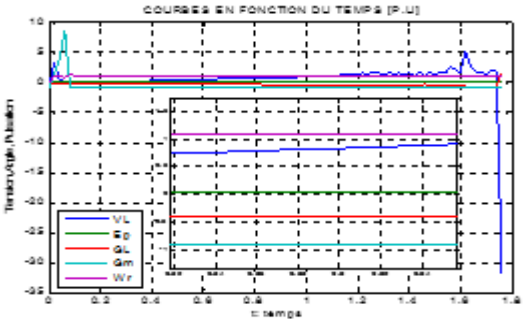


**Figure 8 :** *Allure des Paramètres en augmentant progressivement la puissance*

Les courbes affichées dans la ***Figure 8*** démontrent les allures des variations de la composante de solution optimale de système simplifié en fonction du temps. Ainsi on augmente progressivement la puissance jusqu'à p=1.2 [p.u]. Après t = 1.7 [s], l'instabilité se manifeste due à l'augmentation de la puissance, la tension oscille et suivie d'une chute brutale. Le point d'effondrement est caractérisé par le fonctionnement de puissance maximale. L'étape suivante : On applique les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker, en introduisant les paramètres de Lagrange, en quelques itérations seulement, on trouve les courbes suivantes :

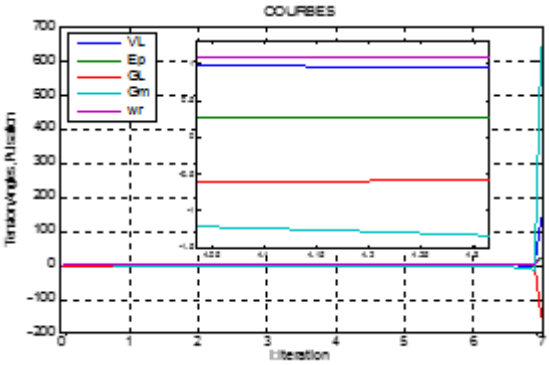


**Figure 9 :** *Solutions en fonction nombre d'itération*

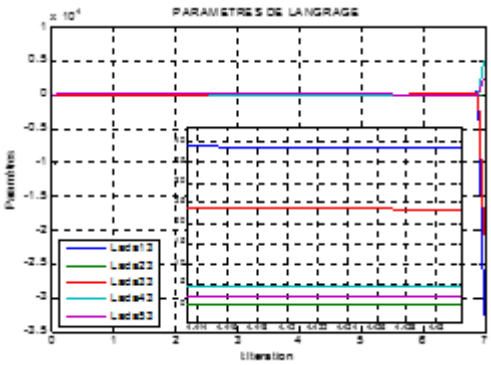


**Figure 10 :** *Multiplicateur de Lagrange*

On constate qu'il n'a pas de décalage des allures des courbes entre la ***Figure 7*** et la ***Figure 9*** même si on introduire les multiplicateurs de Lagrange. On peut affirmer que le point obtenu $Z^* = [0.8;002;-0.481;-0.8;1.1]$ correspondant à la valeur maximale de la puissance.

### 3-2. Deuxième partie

Considérons maintenant le système complet de la ***Figure 1***. Après avoir manipulé et programmé les systèmes d'équation, on trouve les courbes en régime dynamique suivantes :

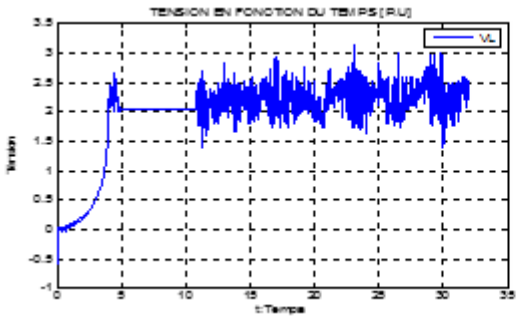


**Figure 11 :** *Tension VL en fonction du temps*

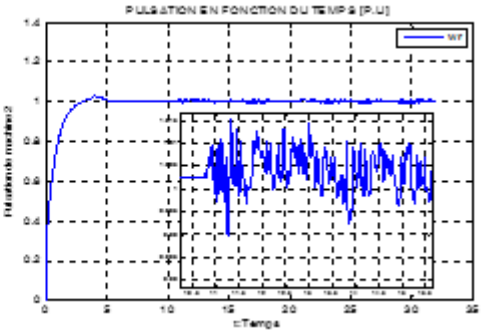


**Figure 12 :** *Vitesse de la machine asynchrone*

En introduisant une vitesse du vent non constante (qui varie dans le temps) à partir 11 [s], on voie que le système n'est pas stable. Cherchons le point de fonctionnement optimal à partir de méthode de newton sans des conditions limites, et pas des contraintes de sécurité en augmentant progressivement la puissance de la charge, on a :

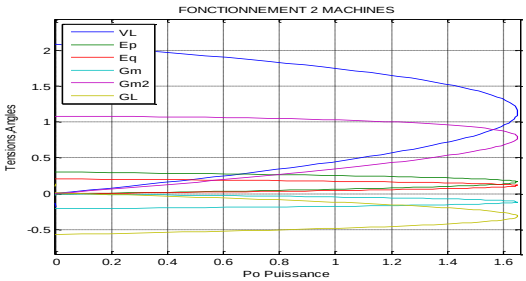


**Figure13 :** *Paramètres en fonction de puissance*

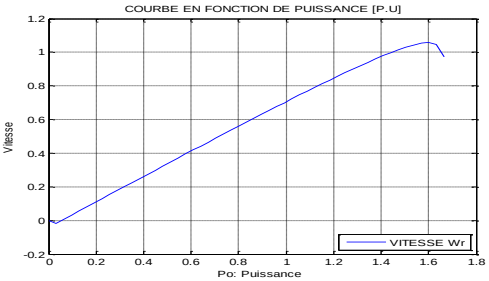


**Figure 14 :** *Vitesse de la machine Asynchrone*

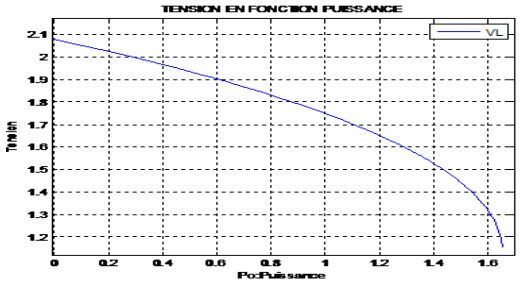


**Figure 15 :** *Tension en fonction de puissance*

Pour deux machines, on voie qu'en une certaine valeur de puissance (entre Po = 1.6 [p.u] et Po = 1.8 [p.u]), les courbes ont des tangentes verticales, ces sont les points où la puissance de la charge est maximale, c'est à dire le système ne peut pas fonctionner au-delà de cette valeur de puissance. En outre, appliquant les conditions de Karush Kuhn Tucker et on introduit la méthode de point intérieur pour la recherche de point de fonctionnement optimal, on trouve les courbes suivantes en fonction des nombres des itérations (pas 0.2 présente une itération) :

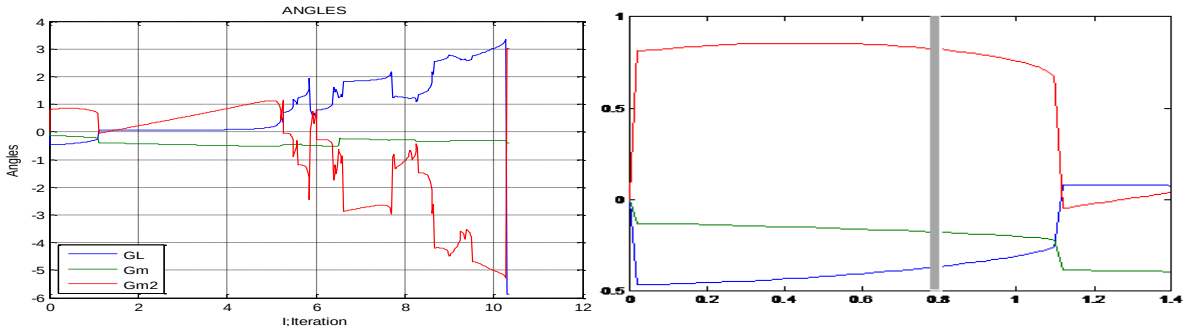


**Figure 16 :** *Courbes des angles en fonction nombre itérations*

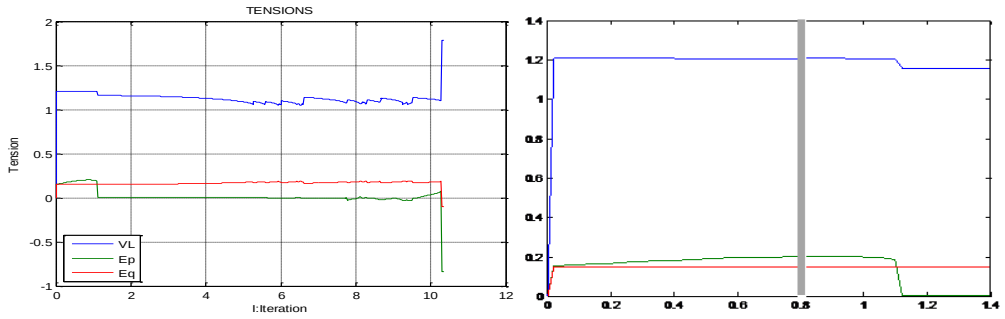


**Figure 17 :** *Allures des tensions en fonction nombre itérations*

Les allures des multiplicateurs de Lagrange sont données par la ***Figure 18*** en fonction de nombres d'itération.

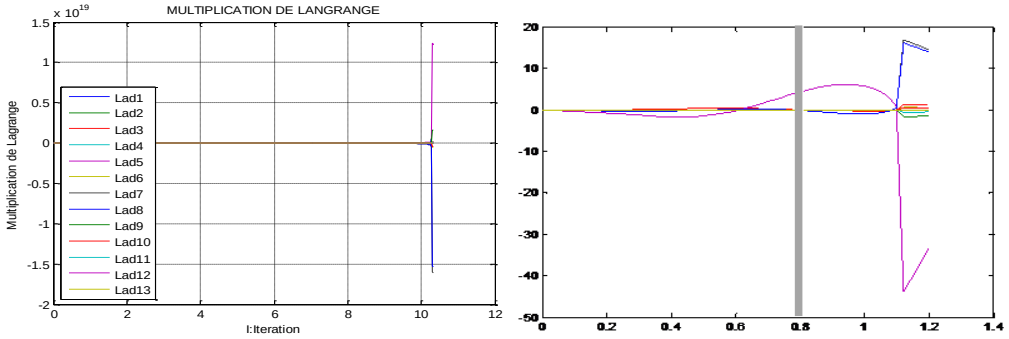


**Figure 18 :** *Courbes des variations des multiplicateurs de Lagrange*

Les barres verticales sur les ***Figures*** ci-dessus indiquent les valeurs du point de fonctionnement optimal réalisable et acceptable pour les limites de sécurité et des critères satisfaisantes.

## 4. Conclusion

Cet article a pour but de maximiser la puissance produite par un système énergétique avec la méthode de Karush-Kuhn-Tuker ne nécessitant pas de commande mécanique et électronique. On a étudié deux types des systèmes énergétiques : système simplifié et celui formé par deux génératrices, de deux façon différentes, méthodes de Newton et Karush Kuhn Tuker. Concernant le système simplifié, après avoir appliqué les méthodes, on trouve un point de fonctionnement $Z^* = [0.8;002;-0.481;-0.8;1.1]$ qui correspond à la puissance maximale entre p = 1 et p = 1.1 [p.u]. Quant au deuxième système énergétique, on a trouvé un point de fonctionnement qui correspond à la puissance maximale entre P = 1.6 et P = 1.8 [p.u]. Ainsi les résultats obtenus par les deux méthodes sont comparables. Le système fonctionne avec une charge maximale avant d'être effondré et présenté des tangentes verticales. Voilà pourquoi ce point est souvent qualifié de point de puissance optimale. Du point de vue pratique, la résolution des équations avec des conditions de Karush-Kuhn-Tuker est rendue complexe par le fait qu'il faut envisager successivement la condition de toutes les configurations possibles. Le critère d'arrêt de calcul devrait être relié à la satisfaction des conditions d'optimalité. Quant à ce travail, on a bien présenté que la méthode KARUSH KUHN TUKER peut résoudre le problème d'optimisation de fonctionnement des systèmes énergétiques. L'intégration de centrales électriques vertes connectées au réseau pourrait être une solution pour réduire l'utilisation des combustibles fossiles.

## Références


[1] - M. A. KAMARPOSHTI, A comparative study of the implementation wind farms integration based on maximization of voltage stability and system loadability, (2016)

[2] - B. BELTRAN, Contribution à la Commande Robuste des Eoliennes à Base de Génératrices Asynchrones Double Alimentation : Du Mode Glissant Classique au Mode Glissant d'Ordre Supérieur. PhD thesis, Université de Bretagne occidentale-Brest, (2010)

[3] - ABDEELLMALL EEK LAKHDARR and RAHLL II MOSSTTEEFFA Etude comparative des méthodes Hessiennes pour l'optimisation des puissances active, (2013)

[4] - F. CAPITANESCU and L. WEHENKEL, Optimal power flow computations with a limited number of controls allowed to move. IEEE Transactions on Power Systems, 25 (1) (February 2010) 586 - 587

[5] - ANDRESS GROTHEY GINTERIOR, Point Methods for Optimal Power Flow : Linear Algebra Goodies and Contingency Generation, IMA Numerical Analysis 3-5 September (2014), University of Edinburgh

[6] - K. BEN-KILANI and M. ELLEUCH, Structural analysis of voltage stability in power systems integrating wind power. IEEE Trans. on Power Systeme, 28(4) (Nov 2013) 3785 - 3794

[7] - YU ZOU and E. MALIK, Senior Member, IEEE, Simulation Comparisons and Implementation of Induction Generator Wind Power Systems, (June 2013)

[8] - K. BEN-KILANI and M. ELLEUCH, Structural analysis of voltage stability in power systems integrating wind power. IEEE Trans. on Power Systeme, 28(4) (Nov 2013) 3785 - 3794

[9] - FEDERICO MILANO, Power System Analysis Toolbox, Version 2.1.8, Software and Documentation 2013, CHERRIA NAIM, 07/06/2010, Conversion d'énergie produite par des générateurs éoliens

[10] - J. MACHOWSKI, J. BIALEK and J. BUMBY, Power System Dynamics : Stability and Control; John Wiley & Sons : Hoboken, NJ, USA, (2011)

[11] - DR. AHMED NASSER and B. ALSAMMAK, PHD. Optimal Power Flow Solution with Maximum Voltage Stability, Electrical Engineering Department Collage of Engineering University of Mosul, Accepted : 12/1/2011 (2011)

[12] - B. TAMIMI and C. A. CAÑIZARES, Test Systems for Voltage Stability and Security Assessment, IEEE PES Test Systems for Voltage Stability and Security Assessment TF, Technical Report PES-TR19, (August 2015)

[13] - K. NANDIGAM and BH CHOWDHURY, Power flow and stability models for induction generators used in wind turbines. In : IEEE power engineering society general meeting, Denver, CO, pp 2012 - 2016

[14] - Z. WANG, Y. SUN and G. LI and B. T. Ooi, Magnitude and frequency control of grid-connected doubly fed induction generator based on synchronised model for wind power generation, IET Renewable Power generation, (2010)

[15] - SERDAR EKINCI and, A. DEMIROREN, A didactic procedure for transient stability simulation of a multi-machine power system utilizing SIMULINK, Article in *International Journal of Electrical Engineering Education* (August 2015)

[16] - N.-Y. CHIANG, A. GROTHEY, Solving Security Constrained Optimal Power Flow Problems by a Structure Exploiting Interior Point Method. Optimization and Engineering, published online (February 2014)

[17] - ANANE NASSIMA, Méthodes de points intérieurs pour la programmation linéaire basées sur les fonctions noyaux, (30 juin 2012)

[18] - KRIS HAUSER, Constrained Optimization, Lagrange Multipliers, and KKT Conditions. B553 Lecture 7 : February 2, (2012)

[19] - P. CHEN, Hessian matrix vs. Gauss Newton Hessian matrix. SIAM *Journal on Numerical Analysis*, 49(4) (2011) 1417 - 1435

[20] - U. EMINOGLU and S. AYASUN, Modeling and Design Optimization of Variable-Speed Wind Turbine systems. Energies, 7 (2014) 402 - 419

[21] - JAN VELEBA, Possible steady-state voltage stability analyses of electric power systems Intensive Programme "*Renewable Energy Sources*" May 2011, ŽeleznáRuda-Špičák, University of West Bohemia, Czech Republic

[22] - X. P. ZHANG, Restructured Electric Power Systems : Analysis of Electricity Markets with Equilibrium Models. IEEE Press Series on Power Engineering. Wiley, (2010)

[23] - N.-Y. CHIANG, Structure-Exploiting Interior Point Methods for Security Constrained Optimal Power Flow Problems, PhD Thesis, University of Edinburgh (2013)

[24] - ABDEELMALEK LAKHDAR and RAHLI MOSTEFA : étude comparative des méthodes Hessiennes pour l'optimisation des puissances actives, Anale. Seria Informatică. Vol. XI fasc. 2 (2013)

[25] - T. ABEDINZADEH, M. EHSAN and D. TALEBI, Dynamic Modeling and Control of Induction Generators in Wind Turbines *International Journal of Computer and Electrical Engineering,* Vol.4, No 2, (April 2012)

[26] - E. KOKIOPOULOU, J. CHEN, and Y. SAAD, Trace optimization and eigenproblems in dimension reduction methods. Numerical Linear Algebra with Applications, 18(3) (2011) 565 - 602