

# Influence de la position des électrodes d'un détecteur gamma planaire sur le transport des porteurs de charge

Cédric E. BÉOGO<sup>1,2\*</sup>, Ousmane I. CISSÉ<sup>1</sup>, Toussaint T. GUINGANÉ<sup>1</sup> et François ZOUGMORÉ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Département de Physique, Université de Ouagadougou, Laboratoire de Matériaux et Environnement (LAME) O3 BP 7021 Ouagadougou, Burkina Faso <sup>2</sup> Autorité Nationale de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (ARSN), O3 BP 7044 Ouagadougou O3, Burkina Faso

\* Correspondance, courriel : *cedricbeogo@yahoo.fr* 

## Résumé

La spectrométrie gamma est une méthode efficace d'identification et de quantification des éléments radioactifs. Les photons gamma issues d'une source radioactive sont invisibles et intouchables. On a recours à des détecteurs pour les « observer ». Lorsqu'un photon interagit avec le détecteur d'un spectromètre gamma, des porteurs de charges sont créés puis véhiculés vers des électrodes grâce à une différence de potentiel suffisante. Nous calculons le potentiel de polarisation régnant dans une première configuration de détecteur par une méthode numérique basée sur la discrétisation par différences finies. Ce même détecteur est utilisé pour un calcul analytique du potentiel de polarisation et les résultats des deux méthodes sont comparés pour valider la méthode numérique. Cette méthode est alors utilisée dans une seconde configuration de détecteur. Cela nous permet de constater l'influence des électrodes sur le transport des charges.

Mots-clés : détecteur gamma, équation de Laplace, potentiel de polarisation, différences finies.

## Abstract

## Influence of the electrodes position in a planar gamma detector on the transport of charge carriers

The gamma spectrometry uses a gamma photon detection system to identify a radioactive source. The interaction of photon with the spectrometer detector causes the creation of hole-electron pairs. They are transported under the effect of a bias voltage and converted into an electrical signal. The intensity of this current is used to identify the nature of the radioactive elements in the source. Insufficient potential difference would cause a transport deficit that in turn would lead to a measurement error. So we first calculate the applied potential by a numerical method of Laplace equation based on the discretization of the finite difference. The result of this resolution is compared with an analytical method to validate the numerical one. Then we build a planar standard detector to know the distribution of his polarization potential. That permits us to show the influence of the electrodes position on the charge transport.

**Keywords :** gamma detector, Laplace equation, polarization potential, finite difference.

## 1. Introduction

La radioactivité est un phénomène spontané dont les applications innombrables deviennent de plus en plus incontournables pour une nation qui se veut prospère [1]. De nombreuses innovations ont été réalisées dans divers domaines d'activités en exploitant le rayonnement nucléaire. Dans le domaine de la médecine nucléaire par exemple, la radiothérapie au cobalt 60 permet de traiter efficacement le cancer et de le diagnostiquer grâce à l'imagerie médicale. En ce qui concerne l'imagerie, elle est effectuée par des gamma-caméra munis de détecteur généralement de type scintillation [2]. Ce type de détecteur étant moins performant [3], une meilleure alternative est l'utilisation des détecteurs à semi-conducteur. Suivant leur forme géométrique, il existe trois modèles de détecteur fait à base de semi-conducteur. Il s'agit de la géométrie planaire, la géométrie coaxiale et la géométrie puits [4]. Lorsque le rayonnement nucléaire émis par la source est relativement de basse énergie comme ce qui est le cas en médecine nucléaire, le modèle adéquat du détecteur est celui de la géométrie planaire. Des radio-pharmaceutiques sont introduits au sein d'un patient et s'agglutinent autour des tissus cancéreux. Ces produits contenant des sources radioactives vont émettre des rayonnements qui seront détectés. Lorsqu'un photon gamma émis par la source parvient au détecteur, il provoque la libération d'électrons et la formation de trous. Ces paires électron-trou sont ensuite véhiculées sous l'effet d'une différence de potentiel. Dans ce travail, nous nous intéresserons au potentiel de polarisation engendré par les électrodes du détecteur. Ce potentiel est important car il est en partie responsable du transport des porteurs de charge. Ce transport entraine la formation d'un signal électrique qui est proportionnel à l'énergie du photon absorbé dans le détecteur. Le signal sera ensuite utilisé pour identifier la source ou tout simplement détecter sa présence. Nous procéderons au calcul numérique du potentiel de polarisation dans une configuration du détecteur avec lequel la solution analytique est connue. Après avoir vérifié la conformité des résultats numérique et analytique, nous utiliserons la méthode numérique pour modéliser une seconde configuration de détecteur. Les deux configurations sont alors comparées.

## 2. Méthodologie

## 2-1. Principe fondamental

Le rayonnement émis par une source radioactive interagit avec le détecteur en produisant des porteurs de charges qui sont des paires électron-trou. Elles sont transportées grâce à une différence de potentiel appliquée en créant un signal électrique. Ce signal est mesuré et l'intensité obtenue nous donne une estimation de l'énergie du photon incident [5 - 7]. Cette énergie qui est l'emprunte du photon, nous permet d'identifier la source émettrice. Un problème crucial de la mesure est le transport des porteurs de charges. Peut-il être influencé par la position des électrodes ? Deux configurations différentes de détecteur seront modélisées pour vérifier cela



Figure 1 : Les trois électrodes délimitant le domaine

#### 2-2. Calcul analytique

Considérons un domaine délimité par deux électrodes semi-infinies reliées à un potentiel nul et une électrode plane maintenue à un potentiel  $V_0$ . Les deux cathodes semi-infinies sont situées respectivement dans les plans y = 0 et y = b tandis que l'anode est placée à la position x = 0. En considérant cette configuration des électrodes, nous pouvons affirmer que le potentiel est nul à l'intérieur du domaine pour les grandes valeurs de x. Le domaine ainsi décrit est représenté par la *Figure 1* et le calcul analytique consiste à déterminer la distribution du potentiel de polarisation créé en son sein. Il règne dans ce domaine un champ électrique  $\vec{E}$  créé par les électrodes. En considérant  $\varepsilon$  la permittivité du milieu et  $\rho$  la densité totale de charge présente dans le domaine, l'expression du champ électrique est donnée par le théorème de Gauss :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon \vec{E}\right) = \rho \tag{1}$$

Si nous supposons que la permittivité du milieu reste constante sur toute la région alors, nous avons :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$
(2)

Nous pouvons aussi dire que le domaine est électriquement neutre car nous ne considérons pas, ici, le potentiel apporté par les porteurs de charge. On s'intéresse uniquement au potentiel de polarisation. Dans ces conditions, la densité totale de charge est nulle ( $\rho = 0$ ). Ce qui nous emmène à résoudre *l'Equation (2)* qui conduit à *l'Equation (6)* puisque  $\vec{E} = -\nabla V$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(- \vec{\nabla} V\right) = 0 \tag{4}$$

$$-\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\nabla}V=0$$
(5)

$$\Delta V = 0 \tag{6}$$

*L'Equation (6)* est celle de Laplace [8]. Sa résolution nous emmène à fixer des conditions aux limites. Dans le modèle présenté sur la *Figure 1*, la configuration des électrodes nous donne les égalités suivantes :

$$V(y = 0) = V(y = b) = 0$$
(7)

$$V\left(x=0\right)=V_{0} \tag{8}$$

$$V\left(x = \infty\right) = 0 \tag{9}$$

Avec b et  $V_0$  des constantes réelles. L'équation de Laplace est résolue en appliquant la méthode de séparation des variables de Bernoulli sur le potentiel V. La solution exacte de cette équation est donnée par la **Relation (10)** qui représente l'expression du potentiel de polarisation en fonction des coordonnées x et y du domaine :

$$V(x, y) = \frac{4 \cdot V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp\left(-\frac{n\pi x}{b}\right)$$
(10)

Nous procédons maintenant à la détermination de cette solution suivant une méthode numérique qui fera l'objet d'une comparaison avec celle analytique.

#### 2-3. Calcul numérique

#### 2-3-1. Description de la première configuration de détecteur



Figure 2 : Première configuration du détecteur

Le détecteur que nous représentons ici est choisi de telle sorte que sa configuration soit identique à celle du domaine utilisé pour le calcul analytique. Considérons donc un semi-conducteur en forme carré portant des électrodes sur trois de ses bords. Il s'agit du détecteur représenté schématiquement à la *Figure 2*.

L'anode N est placée dans le plan x = 0 et les deux cathodes notées P sont placées respectivement aux positions y = 0 et y = b. La valeur du potentiel sera déterminée en tout point du détecteur. Pour cela, nous décomposons sa surface en plusieurs points afin de créer un maillage formé de 25 nœuds représentés sur la *Figure 3*.



Figure 3 : Maillage de la première configuration

Sur cette *Figure*, les douze points rouges indiquent des nœuds à potentiels inconnus. La condition aux limites de Neumann homogène [9] sera appliquée sur les nœuds situés sur le bord droit du maillage. Cette condition permet d'établir une relation entre les potentiels inconnus en ces points et ceux des proches voisins. Quant aux nœuds verts qui désignent la cathode, ils sont de potentiels nuls. De même, le potentiel au niveau des nœuds bleus, désignant l'anode, est connu et vaut  $1 \ 000 \ V$ . Ces valeurs sont prises en conformité avec les conditions aux limites établie dans les *Relations (7) et (8)*. Pour la *Relation (9)*, cependant, nous avons trouvé comme alternative la condition de Neumann homogène car contrairement au cas analytique, nous avons placé un bord pour que le détecteur ne soit pas infini.

#### 2-3-2. Description du détecteur planaire standard



Figure 4 : Modèle du détecteur planaire standard

```
Cédric E. BÉOGO et al.
```

Nous modélisons une seconde configuration de détecteur en forme rectangulaire *(Voir Figure 4).* Il s'agit d'une configuration de détecteur classique. Ce détecteur porte des électrodes sur deux de ses bords parallèles. Le maillage de ce type de détecteur est représenté à la *Figure 5*. Il est formé de trente (30) nœuds dont vingt (20) sont à potentiels inconnus. La condition de Neumann homogène sera appliquée sur les nœuds à potentiels inconnus et situés sur les bords dépourvus d'électrodes tandis que celle de Dirichlet [9] sera utilisé pour les nœuds placés sur les électrodes de couleurs vertes et bleues auxquels nous fixerons la valeur

du potentiel à 0 V et 1 000 V respectivement. Cette configuration est différente de la première par la disposition des électrodes sur le détecteur. Cela nous permettra par comparaison des distributions de potentiel dans les deux modèles de voir leur influence sur le transport des charges.



Figure 5 : Maillage du détecteur standard

#### 2-3-3. Présentation de la méthode

Nous avons déterminé la solution analytique de l'équation de Laplace qui représente la distribution du potentiel de polarisation du détecteur planaire définie par la *Figure 2*. Une méthode numérique, basée sur la discrétisation par différences finies, est développée. Nous avons fait ce choix car il est adapté à la résolution des équations différentielles et au type de géométrie planaire sur lequel nous travaillons. C'est également cette méthode que Noreyni et Bira ont employé en 2014 pour résoudre l'équation de Laplace en 2D [10]. Ainsi, en décomposant *l'Equation (6)*, on obtient *l'Equation (11)*:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x, y) = 0$$
(11)

En utilisant les *Equations (12)* et *(13)* [9], nous obtenons *l'Equation (14)*:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V = \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2}$$
(12)

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} V = \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{h^2}$$
(13)

$$\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{h^2} = 0$$
(14)

Après discrétisation nous obtenons *l'Equation (15)* qui exprime le potentiel de polarisation appliqué à chaque nœud du maillage défini au niveau des *Figures 3 et 5* :

$$V_{i-1,j} + V_{i,j-1} - 4V_{i,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j+1} = 0$$
(15)

Les variables *i* et *j* indiquent les positions des nœuds du maillage respectivement sur les axes horizontal et vertical. Ainsi, en utilisant *l'Equation (15)*, le potentiel est fixé pour chaque nœud placé sur le bord en accord avec les conditions aux limites. Pour les autres nœuds qui ne sont pas pris en compte par ces conditions, la condition de Neumann homogène [9] y est appliquée. Il s'agit des nœuds 4, 8 et 12 pour la configuration de la *Figure 3*. Concernant le maillage de la *Figure 5*, nous avons les nœuds 1, 2, 3, 4 et 17, 18, 19, 20. En ces

nœuds, nous appliquons la *Relation*  $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ .

Les autres valeurs du potentiel sont déterminées par la résolution d'une équation matricielle de type A.X = B obtenue en remplaçant les différentes valeurs du potentiel dans *l'Equation (15)*. Ensuite, l'équation matricielle est résolue en utilisant l'algorithme de Gauss Seidel [9]. Dans cette équation, A représente la matrice des coefficients et X la matrice colonne des potentiels inconnus que nous allons déterminer. B est une matrice colonne de constantes réelles connues.

	- 4	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
<i>A</i> =	1	- 4	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	1	- 4	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	1	- 4	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	1	0	0	0	- 4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	1	0	0	1	- 4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	1	0	0	1	- 4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	) ) )
	0	0	0	1	0	0	1	- 4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	1	0	0	0	- 4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	1	0	0	1	- 4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	~
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	- 4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	J
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	- 4	0	0	0	1	0	0	0	0	)
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	- 4	1	0	0	1	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	- 4	1	0	0	1	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	- 4	1	0	0	1	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	- 4	0	0	0	1	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	- 4	1	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	- 4	1	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	- 4	1	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	- 4	
X =	t (v	V	V	V	V	V	V I	/ V	V	V	V	V	, r	, v	, ,	V	V	V	V	<i>v</i> )	
<i>n</i> –	(1	2	3	<b>4</b>	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	<i>t ,</i>																			,	
B =	ʻ (0	0	0	$-V_{0}$	0	0	0 -	$-V_0$	0	0	) –	$V_0$	0	0 0	_	$V_0$	0 (	) 0	- 1	/ <sub>0</sub> )	

## 3. Résultats et discussion

La différence de potentiel a été calculée précédemment de façon analytique et numérique et les résultats sont présentés dans cette section où nous validerons tout d'abord la méthode numérique et l'algorithme utilisé à cet effet. Ensuite, nous verrons l'influence de la configuration des électrodes sur la distribution du potentiel et donc du transport des charges.

#### 3-1. Validation de la méthode numérique

En procédant par un calcul analytique, nous sommes parvenus au résultat donné par la *Relation (10)* qui nous fournit les valeurs du potentiel V régnant dans le détecteur en fonction des coordonnées x et y.



Figure 6 : Représentation en 3D du potentiel obtenu par le calcul analytique

Nous proposons une représentation de cette solution à la *Figure 6*. Elle est similaire à la solution trouvée par Noreyni et Bira en 2014. Dans cette représentation, nous remarquons que le potentiel est maximal au niveau de l'anode situé dans le plan x = 0. Il diminue de manière exponentielle suivant les valeurs de x au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'anode. Les zones situées au voisinage de cette électrode sont celles qui connaissent les meilleurs transports de charges lorsque des porteurs y sont créés. Plus on s'éloigne de l'anode et plus les charges auront du mal à être collectées. La *Figure 7* est une représentation graphique des solutions numériques trouvées. Elle présente une concordance avec la représentation graphique des solutions analytiques. Ce qui nous permet d'affirmer que l'algorithme utilisé pour la résolution numérique est assez efficace. Elle sera donc validée et réutilisée pour la modélisation de la seconde configuration de détecteur.



Figure 7 : Représentation en 3D du potentiel de polarisation obtenu par les calculs numériques

#### 3-2. Influence des électrodes sur la distribution du potentiel de polarisation

Nous adaptons l'algorithme du modèle décrit à la *Figure 5* en modifiant les conditions aux limites ainsi que la taille de la matrice A de l'équation à résoudre. Cela nous permet d'obtenir la solution représentée à la *Figure 8*.



Figure 8 : Représentation en 3D du potentiel de polarisation du détecteur standard

Nous remarquons que dans cette configuration de détecteur, le potentiel de polarisation décroit de manière linéaire suivant les valeurs de x. Cela est dû au fait que le potentiel qui était fixé à zéro sur les bords y = 0 et y = b ne l'est plus dans cette configuration. C'est ce qui justifie également le fait qu'on observe sur les zones proches de ces bords un potentiel plus élevé dans la seconde configuration que dans la seconde. Les porteurs de charges qui seront créés dans ces zones ont ainsi moins de chance dans la première configuration d'être collectés que dans la seconde. Ce qui nous emmène donc à dire qu'en se référant au potentiel de polarisation, le détecteur standard est meilleur par rapport à celui de la première configuration. Nous voyons ainsi que la position des électrodes a un impact sur le transport des porteurs.

## 4. Conclusion

Le principe de détection des photons gamma est de créer des porteurs de charges qui seront véhiculés sous forme de signal électrique proportionnel au rayonnement reçu. Lorsque le signal est mal formé ou que les porteurs sont mal véhiculés, l'identification est erronée. C'est pourquoi nous posons le problème de transport des charges le long d'un détecteur planaire. Pour résoudre ce problème, nous avons procédé à la résolution analytique de l'équation de Laplace. En utilisant ce résultat, on valide une méthode numérique bâtie sur la discrétisation par différences finies. Ce qui a permis de modéliser un détecteur planaire standard et d'en déduire que la configuration des électrodes d'un détecteur influencerait le transport des charges. Ce travail peut être amélioré en considérant la permittivité  $\varepsilon$  du semi-conducteur et le potentiel créé par les charges elles-mêmes. Une fois cela fait, plusieurs configurations de détecteurs pourront être testées pour déterminer le plus performant.

## Références

- [1] Association nucléaire canadienne, Le nucléaire voie de l'avenir. *Aide-mémoire du nucléaire canadien, Rapport d'activité édition (2011)*. www.cna.ca/Aide-memoireDuNucleaireAuCanada2011.pdf
- [2] CLAUDE LE SECH, CHRISTIAN NGO, *Physique Nucléaire : Des quarks aux applications*. Dunod, Paris, (2010).
- [3] ERIC GROS D'AILLON, *Etude des performances spectrométriques des détecteurs gamma CdZnTe/CdTe monolithiques.* PhD thesis, Université Joseph Fourier, (Novembre 2005).
- [4] FABIEN COURTINE, Etalonnage d'un spectromètre gamma en vue de la mesure de la radioactivité naturelle. Mesures expérimentales et modélisation par techniques de Monte Carlo. PhD thesis, Université Blaise Pascal, (2007).
- [5] MICKAEL LEMERCIER, Développement d'une méthode analytique pour quantifier par spectrométrie gamma in-situ les radionucléides présents dans le sol. PhD thesis, Paris XI, (2007).
- [6] NAFAA REGUIGUI, Gamma ray spectrometry. Practical Information. (Septembre 2006).
- [7] THOMAS VIGINEIX, *Exploitation des spectres gamma par la method non paramétrique et indépendante d'à priori formulé par l'opérateur*. PhD thesis, Université de Caen, (2011).
- [8] MICHEL SAINT-JEAN, JANINE BRUNEAUX et JEAN MATRICON. *Electrostatique et magnétostatique*. Paris : Belin (2002).
- [9] FETHI ALOUI, LOGICIEL MATLAB : *Calcul scientifique. Cours pratique pour débutant en MatLab, mathématique pour la physique*, Université de Nantes, (Juillet 2004).
- [10] FALL C. M. NOREYNI et GUEYE S. BIRA, Equation de Laplace en 2D : Résolution numérique avec la méthode des différences finies en utilisant les bibliothèques de Fortran lapack et blas. Journal des Sciences et Technologies, Vol. 10 (2013-2014) 35-40. Sénégal, ISSN 0850-5802.