

## **Influence de l'ouverture du sommet sur la convection rotatoire pure autour d'un cône de révolution**

**Germain BEZANDRY<sup>1\*</sup>, Raymond RANDRIANARIVELO<sup>1</sup>, Ulrich CANISSIUS<sup>2</sup> et Edouard ALIDINA<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *Université d'Antsirana, Faculté des Sciences, Laboratoire de Mécanique des Fluides et Systèmes Energétiques Appliqués (LMFSEA), BP 0 Madagascar*

<sup>2</sup> *Laboratoire de Mécanique et de Métrologie (LMM), Ecole Normale Supérieure pour l'Enseignement Technique, Université d'Antsirana, BP 0, Madagascar*

---

\* Correspondance, courriel : [bezandriantallah@gmail.com](mailto:bezandriantallah@gmail.com)

### **Résumé**

Le présent travail porte sur l'étude d'une convection tridimensionnelle autour d'un cône en rotation uniforme autour de son axe de révolution. Notre étude est focalisée sur les effets de l'ouverture du sommet du cône sur les aspects du champ dynamique et thermique de la convection. A l'aide d'un modèle numérique, les équations de continuité, de Navier-Stokes et de conservation de l'énergie sont résolues par une méthode implicite aux différences finies et l'algorithme de Thomas. Les résultats sont présentés par des profils adimensionnels de vitesses et de températures ainsi que par ceux du nombre de Nusselt local et des coefficients de frottement.

**Mots-clés :** *convection, cône de révolution, ouverture du sommet, champs dynamique et thermique, laminaire.*

### **Abstract**

#### **Influence of the top opening on the pure rotatory convection around a revolution cone**

The present work refers to the study of a three-dimensional convection around a cone in a uniform rotation around its revolution axis. Our study is focused on the effects of the cone top opening in dynamic and thermic aspects of the convection. With the help of a digital model, the equations of continuity, the Navier-stokes and the energy conservation are resolved by an implicit method of finite difference and Thomas algorithm. The results are presented by the speed adimensional profiles and the temperatures as well as those of the local Nusselt number and the coefficient of friction.

**Keywords :** *convection, revolution cone, top opening, dynamic and thermic fields, rolling.*

### Nomenclatures

Lettres latines		Lettres grecques	
$a$	diffusivité thermique. ( $m^2.s^{-1}$ )	$\lambda$	conductivité thermique. ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )
$C_{fx}$	coefficient de frottement suivant $x$	$\theta_0$	demi-angle au sommet du cône. (rad)
$C_{f\Phi}$	coefficient de frottement suivant $\Phi$	$\omega$	vitesse de rotation. ( $rad.s^{-1}$ )
$C_p$	chaleur massique. ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ )	$\Phi$	coordonnée azimutale. (rad)
$h$	coefficient d'échange par convection	$\nu$	viscosité cinématique. ( $m^2.s^{-1}$ )
$L$	longueur de la génératrice du cône. (m)	$\tau_\Phi$	contrainte de frottement suivant $\Phi$
$Re$	nombre de Reynolds	$\tau_x$	contrainte de frottement suivant $x$
$Pr$	nombre de Prandtl	$\Omega^+$	vitesse angulaire réduite
$Nu$	nombre de Nusselt		
$T$	températures de la paroi (K)		
$T_\infty$	température du fluide loin de la paroi. (K)		Exposant
$T_p$	température de la paroi. (K)		+ grandeurs adimensionnelles
$T^+$	température réduite		
$V_x$	composante méridienne de la vitesse		
$V_y$	composante normale de la vitesse		
$V_\Phi$	composante azimutale de la vitesse. ( $m.s^{-1}$ )		
$x, y, z$	coordonnées cartésiennes. (m)		
$r$	distance normale du projeté $M$ d'un point du fluide à l'axe de révolution du cône		

## 1. Introduction

Les transferts thermiques autour des corps à symétrie de révolution ont fait l'objet de nombreuses études [2] étant donné leur intérêt théorique et pratique, notamment dans les séchoirs que dans les machines. En ce qui concerne le cône de révolution, des travaux ont été déjà réalisés : de [3] dont l'étude portait sur les transferts par convection forcée laminaire autour d'un cône de révolution fermé sur sa partie supérieure par une calotte sphérique et incliné par rapport à la verticale. Il a déterminé la distribution de la vitesse extérieure à la couche limite en utilisant la méthode des singularités. Et très récemment, [4] a consacré une étude numérique de la convection naturelle autour d'un cône de révolution incliné. Il a étudié l'influence de l'angle d'inclinaison du cône sur le transfert thermique. [5] traite la convection naturelle thermique et massique dans la couche limite autour d'un cône. Il a montré sur les champs dynamique et thermique l'influence de la variation de viscosité dynamique en fonction de la température. [6] traite, en régime permanent, la convection naturelle thermique et massique dans la couche limite laminaire autour d'un tronc de cône à paroi sinusoïdale. Il montre que l'augmentation de l'amplitude de la sinusoïde décrivant la forme de la paroi du tronc de cône ainsi que du rapport entre les forces volumiques d'origine thermique et celles d'origine massique est à l'origine de la diminution des nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens. L'objectif de ce travail est d'analyser par une simulation numérique, l'influence de l'ouverture du sommet du cône sur les comportements thermique et dynamique d'un écoulement laminaire en convection rotatoire pure le long d'un cône isotherme, en rotation autour de son axe de révolution avec une vitesse angulaire constante.

## 2. Méthodologie

### 2-1. Modèle physique

Considérons un cône de révolution immergé dans un fluide newtonien en rotation uniforme à la vitesse  $\omega$  autour de son axe de révolution (**Figure 1**). La paroi du cône est maintenue à une température constante  $T_p$ , différente de la température  $T_\infty$  du fluide loin de la paroi qui est également constante.

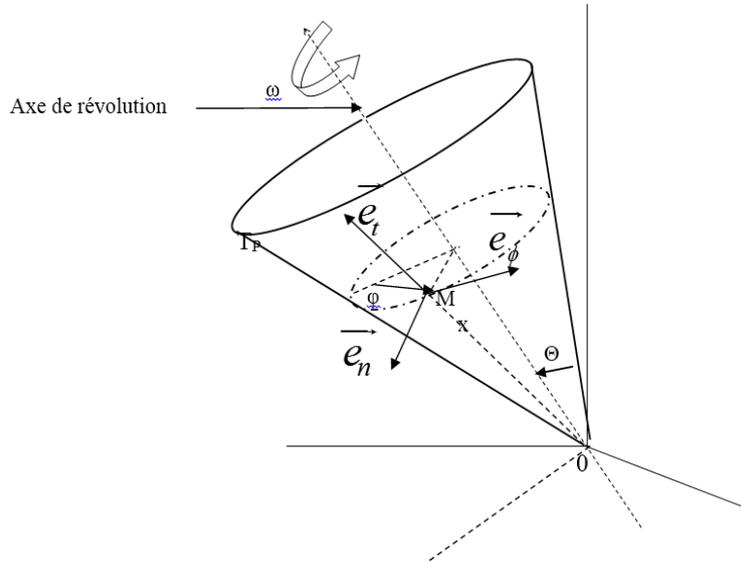


Figure 1 : Schéma du modèle physique

### 2-2. Formulation mathématique du problème

#### 2-2-1. Hypothèses simplificatrices

Nous avons adopté les hypothèses suivantes afin de développer notre modèle numérique :

- L'écoulement est permanent et en régime laminaire ;
- Le fluide est Newtonien et incompressible ;
- Les propriétés physiques du fluide sont constantes, hormis la masse volumique, dans l'équation du mouvement, qui dépend de la température ;
- La fonction de dissipation visqueuse est négligeable.

#### 2-2-2. Équations générales de conservation

- **Équation** de continuité

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{V_x}{r} \frac{dr}{dx} = 0 \tag{1}$$

- **Équations** de quantité de mouvement

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{V_\phi^2}{r} \frac{dr}{dx} = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \tag{2}$$

$$V_x \frac{\partial V_\phi}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_\phi}{\partial y} + \frac{V_\phi}{r} V_x \frac{dr}{dx} = \nu \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial y^2} \quad (3)$$

- **Équation** de la chaleur

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4)$$

A ces **Équations**, nous associons les conditions aux limites suivantes :

- A la paroi  $y=0$

$$T = T_p; V_x = 0; V_y = 0; V_\phi = r \omega \quad (5)$$

- loin de la paroi  $y \rightarrow \infty$

$$T = T_\infty; V_x = 0; V_y = 0; V_\phi = 0 \quad (6)$$

### 2-2-3. Formulations adimensionnelles

En utilisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$x^+ = \frac{x}{L} \quad y^+ = \frac{y}{L} \sqrt{\Re_{e\omega}} \quad \Phi^+ = \Phi \quad r^+ = \frac{r}{L} \quad Y^+ = \frac{y}{L} \quad \Omega^+ = \omega \quad (7)$$

$$V_x^+ = \frac{V_x}{L\omega} \Re_{e\omega}^{\frac{1}{4}} \quad V_y^+ = \frac{V_y}{L\omega} \Re_{e\omega}^{\frac{3}{4}} \quad V_\phi^+ = \frac{V_\phi}{L\omega} \Re_{e\omega}^{\frac{1}{4}} \quad T^+ = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} \quad (8)$$

où,  $Nu = - \frac{L}{(T_p - T_\infty)} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$  est le Nombre de Nusselt et,  $\Re_{e\omega} = \frac{L^2 \omega}{\nu}$  le nombre de Reynolds de

rotation, les **Équations** adimensionnelles dans la couche limite s'écrivent :

- **Équation** de continuité

$$\frac{\partial V_x^+}{\partial x^+} + \frac{\partial V_y^+}{\partial y^+} + \frac{V_x^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx^+} = 0 \quad (9)$$

- **Équations** de quantité de mouvement

$$V_x^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial x^+} + V_y^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial y^+} - \frac{V_\phi^{+2}}{r^+} \frac{dr^+}{dx^+} = \Re_{e\omega}^{\frac{1}{4}} \frac{\partial^2 V_x^+}{\partial y^{+2}} \quad (10)$$

$$V_x^+ \frac{\partial V_\phi^+}{\partial x^+} + V_y^+ \frac{\partial V_\phi^+}{\partial y^+} + \frac{V_x^+ V_\phi^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx^+} = \text{Re}_\omega \frac{1}{4} \frac{\partial^2 V_\phi^+}{\partial y^{+2}} \quad (11)$$

• **Équation de la chaleur**

$$V_x^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + V_y^+ \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \frac{1}{\text{Pr}} \text{Re}_\omega \frac{1}{4} \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{+2}} \quad (12)$$

A ces **Équations**, nous associons les conditions aux limites suivantes :

• A la paroi :  $y^+ = 0$

$$T^+ = 1 \quad V_x^+ = 0 \quad V_y^+ = 0 \quad V_\phi^+ = r^+ \text{Re}_\omega \frac{1}{4} \quad (13)$$

• Loin de la paroi  $y^+ \rightarrow \infty$

$$T^+ = 0 \quad V_x^+ = 0 \quad V_y^+ = 0 \quad V_\phi^+ = 0 \quad (14)$$

**2-2-4. Nombre de Nusselt, contraintes à la paroi et coefficients de frottement**

• nombre de Nusselt :

$$\text{Nu} \text{Re}_\omega \frac{-1}{2} = - \left( \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} \quad (15)$$

• contraintes à la paroi :

$$\tau_x = \mu \left( \frac{\partial V_x^+}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} \quad \text{et} \quad \tau_\phi = \mu \left( \frac{\partial V_\phi^+}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} \quad (16)$$

• coefficients de frottement :

$$\frac{1}{2} C_{f_x} \sqrt{\text{Re}_\omega} = \left( \frac{\partial V_x^+}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} C_{f_\phi} \sqrt{\text{Re}_\omega} = \left( \frac{\partial V_\phi^+}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} \quad (17)$$

**3. Résolution numérique**

Les **Équations** de continuité, de quantité de mouvements et de la chaleur associées aux conditions aux limites sont discrétisées à l'aide d'une méthode implicite aux différences finies. Les **Équations** de quantité de mouvement et de la chaleur se mettent sous la forme de  $A_j X_{j-1} + B_j X_j + C_j X_{j+1} = D_j \quad 2 \leq j \leq J_{\text{max}} - 1$  et résolues par l'algorithme de Thomas. La composante

normale  $v^+$  de la vitesse est déduite de l'Équation de continuité :

$$V^+ ({}^{i+1}_{k,j+1}) = V^+ ({}^{i+1}_{k,j}) - \Delta y^+ \left[ \frac{U^+ ({}^{i+1}_{k,j}) - U^+ ({}^i_{k,j})}{\Delta x^+} + \frac{U^+ ({}^{i+1}_{k,j})}{\Delta x^+} \left( 1 - \frac{r^+ (i)}{r^+ (i+1)} \right) \right] \quad (18)$$

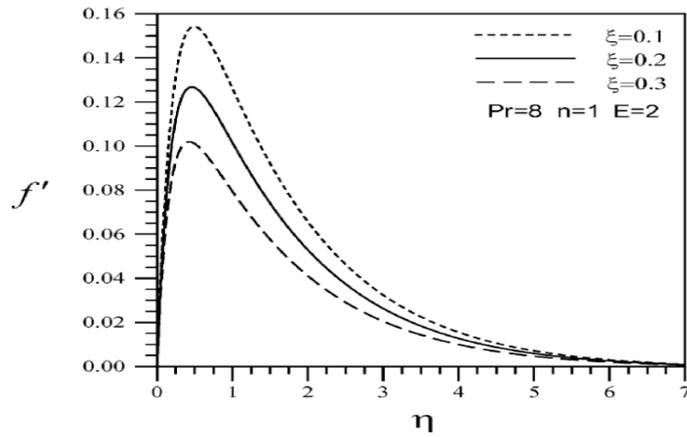
Le critère de convergence, vérifié simultanément pour  $T^+$ ,  $U^+$ ,  $V^+$  et  $W^+$ , est :

$$\left| \frac{\max (F^{n+1} - F^n)}{\max (F^n)} \right| \leq 10^{-6} \quad (19)$$

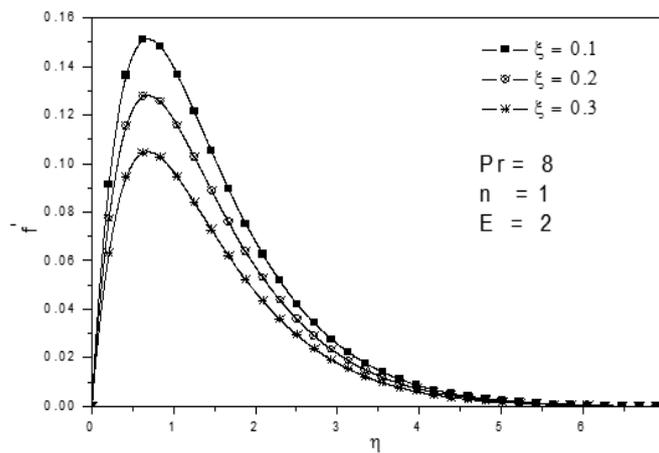
Les dérivées partielles des expressions de Nusselt local et des coefficients de frottement pariétal sont approchées par une discrétisation à trois points.

#### 4. Résultats et discussion

Nous fixons :  $Pr = 0.72$ ,  $\Delta x = 0.0025$ ,  $\Delta y = 0.0001$ ,  $\Omega^+ = 1$ ,  $L = 1$  m. Nous comparons les résultats relatifs à la convection naturelle autour d'un cône issus de notre code de calcul à ceux obtenus par les Auteurs [5]. La **Figure 2a** et la **Figure 2b** représentant la variation de la composante méridienne adimensionnelle en fonction de la coordonnée normale  $y^+$ , montrent que nos résultats sont en bon accord avec ceux de la littérature, l'écart relatif ne dépassant pas 5 %. A la **Figure 3**, les courbes montrent que, au fur et à mesure que l'angle d'ouverture est important, la valeur de la composante méridienne de la vitesse représentée par un pic prend en importance. Plus l'ouverture est grande, plus la variation de cette composante est lente. A la **Figure 4**, on observe l'effet inverse c'est-à-dire que la composante normale de la vitesse croît en sens inverse de l'angle d'ouverture du cône et qu'au fur et à mesure que cette ouverture est grande, la croissance de la valeur cette composante est faible. La **Figure 5** montre que l'ouverture de l'angle du cône favorise la composante azimutale de la vitesse. Aux faibles valeurs de cette ouverture, la vitesse tend à s'uniformiser, d'une part et que d'autre part, la variation de sa valeur est importante, La **Figure 6** illustre l'allure de la température. Elle montre que l'importance de la température du fluide est de sens inverse de celle de l'angle d'ouverture du cône. Sa variation est faible surtout lorsque cette ouverture est grande. Les **Figures 7 et 8** montrent les effets opposés de l'accroissement de l'angle d'ouverture. En effet, le coefficient de frottement suivant la ligne méridienne augmente avec l'ouverture du cône et que sa valeur le long de la paroi, du sommet 0 vers la base du cône alors que c'est l'inverse qu'on observe pour le coefficient de frottement suivant  $\Phi$ . La **Figure 9** nous montre que le transfert de chaleur prend en importance avec l'ouverture du cône. Nous remarquons d'autre part que sa variation est de plus en plus lente au fur et à mesure que l'ouverture est grande.



(a) Résultat de [5]



(b) Notre résultat

Figure 2 : Comparaison de notre résultat à celui de [5]

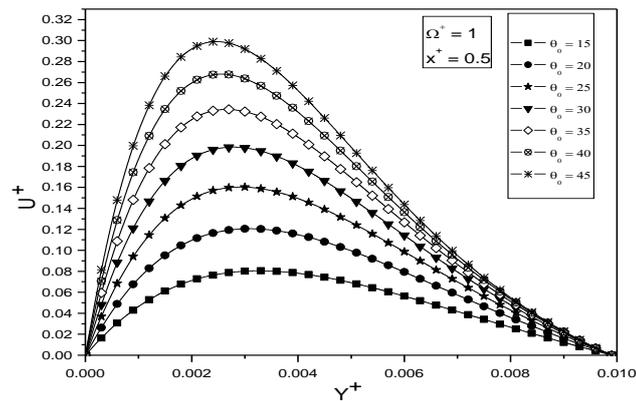


Figure 3 : Vitesse réduite suivant  $x$  en fonction de  $\gamma^+$  pour plusieurs valeurs de  $\theta_0$ ,  $\Omega^+ = 1, x^+ = 0.5$

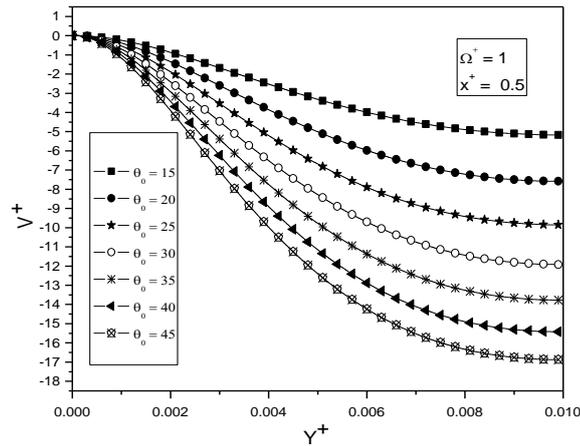


Figure 4 : Vitesse réduite suivant  $y$  en fonction de  $Y^+$  pour plusieurs valeurs de  $\theta_0$ ,  $\Omega^+ = 1, x^+ = 0.5$

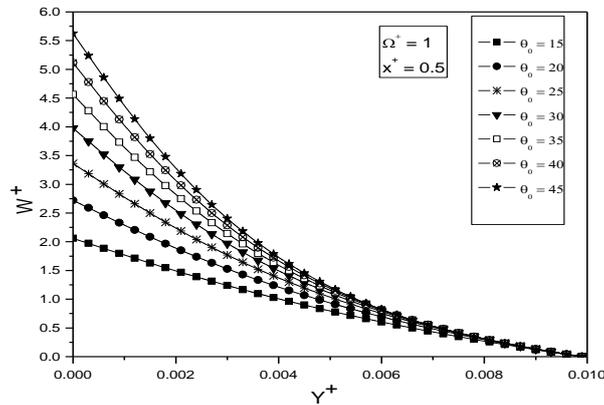


Figure 5 : Vitesse réduite suivant  $\phi$  en fonction de  $Y^+$  pour plusieurs valeurs de  $\theta_0$ ,  $\Omega^+ = 1, x^+ = 0.5$

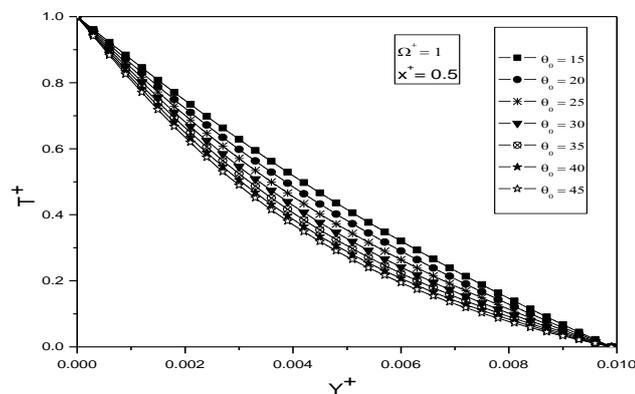


Figure 6 : Température réduite en fonction de  $Y^+$  pour plusieurs valeurs de  $\theta_0$ ,  $\Omega^+ = 1, x^+ = 0.5$

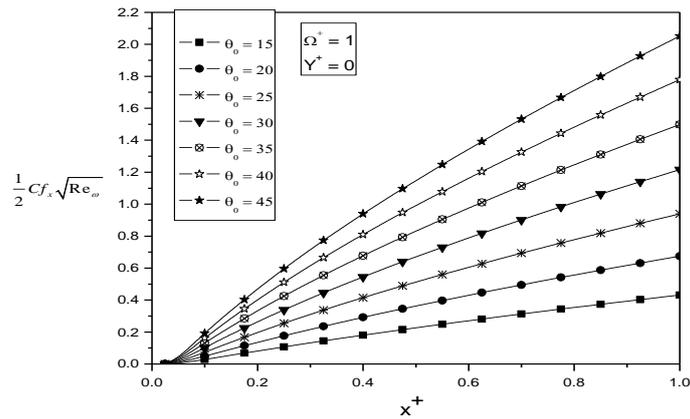


Figure 7 : Coefficient de frottement suivant  $x$  en fonction de  $x+$  pour plusieurs valeurs  $\theta_0$ ,  $\Omega^+ = 1$ ,  $Y^+ = 0$

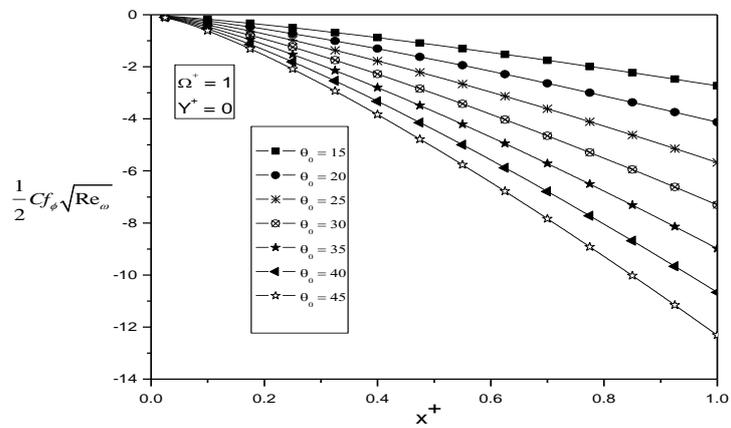


Figure 8 : Coefficient de frottement suivant  $\phi$  en fonction de  $x+$  pour plusieurs valeurs de  $\theta_0$ ,  $\Omega^+ = 1$ ,  $Y^+ = 0$

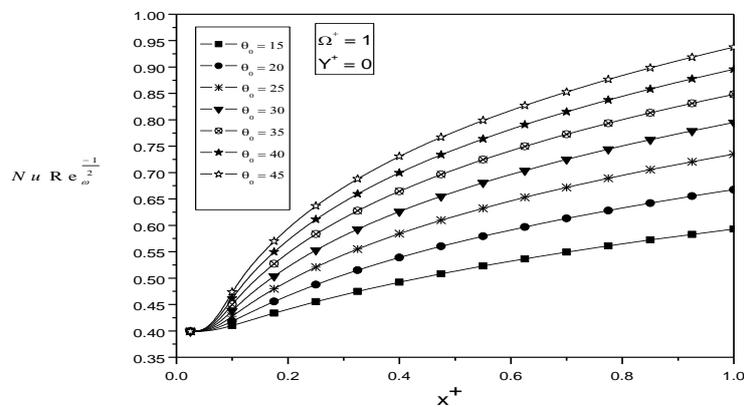


Figure 9 : Nombre de Nusselt en fonction de  $x+$  pour plusieurs valeurs de  $\Omega^+$ ,  $Y^+ = 0$ ,  $\theta_0 = 20^\circ$

## 5. Conclusion

Ce travail a pour objectif de présenter les résultats relatifs à l'influence de l'ouverture du sommet du cône sur l'écoulement et les transferts thermiques en convection rotatoire pure autour d'un cône de révolution. De ce travail il ressort que l'ouverture du cône caractérisée par son demi - angle au sommet  $\theta_0$  a une influence notable sur les composantes méridienne, normale et azimutale de la vitesse. Nous avons cependant constaté qu'au fur et à mesure que l'ouverture est importante, la dépendance des vitesses à cette ouverture est faible d'une part et que d'autre part, en ce qui concerne les vitesses normale, azimutale, aux faibles valeurs de cet angle la vitesse tend à s'uniformiser c'est-à-dire que cette dernière est peu dépendante de  $\theta_0$ . Cette constatation est également notée pour les coefficients de frottement, le nombre de Nusselt et la température pour qui, l'influence de l'ouverture est assez faible.

## Références

- [1] - EDOUARD ALIDINA, " Contribution à l'Etude des Ecoulements Tridimensionnels Laminaires et Permanents Autour de l'Ellipsoïdes de Révolution : Ecoulement d'un Fluide Parfait et Convection Mixte d'un Fluide Newtonien en Couche Limite", Thèse de Doctorat, Université d'Antananarivo, (1997)
- [2] - CHANDRA SHEKAR BALLA, KISHAN NAIKOTI, " *Finite element analysis of magnetohydrodynamic transient free convection flow of nanofluid over a vertical cone with thermal radiation*", SAGE journals, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, PartN : *Journal of Nanomaterials, Nanoengineering Nanosystems*, (2014)
- [3] - FRANÇOIS D'ASSISE RAKOTOMANGA, "Contribution à l'Etude des Transferts Thermiques Convectifs Tridimensionnels Autour d'un Cône de Révolution", Thèse de Doctorat, Université d'Antsiranana, Antsiranana, (2013)
- [4] - CANISSIUS ULRICH, " Etude Numérique de la Convection Naturelle Autour d'un Cône de Révolution Incliné ", Thèse de Doctorat, Université d'Antsiranana, Antsiranana, (2016)
- [5] - CHING YANG CHENG, "Free Convection Heat Transfert from a Non isothermal. Permeable Cone Suction and Temperature Dependent Viscosity", *Journal of applied Science and Engineering*, Vol. 18, N°1 (2015) 17 - 24
- [6] - M. SIABALLAH, B ZEGHMATI et M. DAGUENET, "Etude de la Convection Naturelle Thermique et Massique dans la Couche Limite Autour d'un Tronc de Cône à Paroi sinusoïdale", 12<sup>ème</sup> Journées Internationales de Thermique, Tanger, Maroc du 15 au 17 Novembre 2005
- [7] - SEBASTIEN CANDEL, "Cours de Mécanique des Fluides", Dunod, Paris, (1995)
- [8] - OLIVIER LOUISNARD, "Cours de Mécanique des Fluides".
- [9] - RISSER LAURENT, " Différences Finies pour la Résolution Numérique des Equations de la Mécanique des Fluides"
- [10] - J. F. SACADURA, " Introduction aux Transferts Thermiques", Techniques et Documentation, Paris, (1982)
- [11] - YVES JANNOT, " Transferts Thermiques ", Ecole des Mines NANCY, (2009)
- [12] - LUC MIEUSSENS, "Cours de Fortran 90", Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université de Bordeaux, (2011)
- [13] - MINOSON SENDRAHASINA RAKOTOMALALA, "Etude des Transferts dans la Couche Limite Entourant un Corps à Symétrie de Révolution Tournant dans un Fluide en Présence d'un Ecoulement Axial et d'une Convection Naturelle", Thèse de Doctorat, Université de Nince - Sophia Antipolis U.F.R Faculté des Sciences, France, (1994)

- [14] - BAPUJI PULLEPU, K. EKAMBAVANAN, ALI. J. CHAMKHA, "Unsteady laminar natural convection flow past an isothermal vertical cone, " *Int. J. Heat and Technology*, 25 (2) (2007) 17 - 28
- [15] - D. ANILKUMAR, S. ROY, "Unsteady mixed convection flow on a rotating cone in a rotating fluid, " *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 155, Issue 2 (2004) 545 - 561
- [16] - S. NADIM, S SALEEM, Mixed convection flow of Eyring-Powell fluid along a rotating cone " *Results in Physics*, 4 (2014) 54 - 62