

Modélisation mécanique du comportement viscoélastique d'un milieu poreux et transport sédimentaire dans ce milieu

Tsiriniaina Martin Antoine RAFANOMEZANTSOA*, Mamy Nirina RASOLOARIJAONA,
Adolphe RATIARISON et Jérôme VELO

*Laboratoire de la Dynamique de l'Atmosphère, du Climat et des Océans (DyACO), Faculté des sciences,
Université d'Antananarivo, Madagascar*

* Correspondance, courriel : harisoatsiry@gmail.com

Résumé

Pour une échelle suffisamment petite, tous les matériaux sont hétérogènes. Ces hétérogénéités peuvent être considérées comme des milieux poreux. L'introduction de la méthode d'homogénéisation permet de donner les propriétés équivalentes à une échelle supérieure. Dans cette démarche nous avons étudié le cas d'un milieu poreux saturé et périodique en présence de l'écoulement diphasique (transport du sédiment), dont la déformation est viscoélastique. Différentes techniques ont été introduites à cet effet, notamment la séparation d'échelle, la double dérivation, le développement asymptotique et la périodicité des structures. La résolution du problème se ramène à des équations aux dérivées partielles dont la formulation variationnelle se résout sur des espaces fonctionnels adaptés au domaine étudié. Un passage à la moyenne a été établi pour déterminer le comportement moyen du matériau.

Mots-clés : *homogénéisation, milieu poreux, déformation, macroscopique, séparation d'échelle, périodique, viscoélastique.*

Abstract

Mechanical modeling of the viscoelastic behavior and sediment transport of a porous media

For a sufficiently small scale, all materials are heterogeneous. These heterogeneities can be considered like porous. The introduction of the homogenization method permits to give the equivalent properties to a superior scale. In this work we studied the case of a saturated and periodic porous environment in the presence of the diphasic flow (sedimentary transport), whose distortion is viscoelastic. Different techniques have been introduced to this effect, notably the separation of scale, the double derivation, the asymptotic development and the periodicity of the structures. The resolution of the problem amounted to derivatives partials equations in which the variationnal formulation is resolved on functional spaces adapted to the studied domain. A passage to the average has been established to determine the middle behavior of the material.

Keywords : *homogenization, porous environment, distortion, macroscopic, separation of scale, periodic, viscoelastic.*

1. Introduction

Que le matériau impliqué soit naturel (sol, herbe, remblais etc.) ou artificiel (ciment, mortier, béton, barrière ouvragée etc.), la connaissance de la relation entre propriétés physiques caractérisant le comportement macroscopique du matériau (tenseurs de perméabilité, de dispersion ou de diffusivité effective, facteur de formation, etc.) et la microstructure sous jacente est un enjeu important. De nombreux matériaux composites sont caractérisés par une nature fondamentalement hétérogène. Leur constitution microscopique relève de l'assemblage de constituants très différents selon une géométrie compliquée. Lorsqu'on se place au point de vue macroscopique, il est normal d'essayer de prédire les propriétés moyennes de tels matériaux afin de les remplacer par un matériau homogène équivalent et d'en étudier la réponse structurale au niveau macroscopique. La théorie de l'homogénéisation répond à cette attente, elle permet d'établir de manière rigoureuse les propriétés moyennes équivalentes de corps hétérogènes à l'échelle microscopique et de déterminer les micros contraintes locales pour une sollicitation donnée. Cette technique permet en outre de déduire les comportements macroscopiques par la résolution de problèmes locaux à l'échelle microscopique. Depuis les années soixante-dix, la technique de l'homogénéisation a été utilisée uniquement pour obtenir des propriétés élastiques effectives des composites et des contraintes macroscopiques homogénéisés, bien que, ces dernières perdent des effets locaux, par exemple lors de la concentration des contraintes locales qui peuvent entraîner la fracture ou des déformations plastiques.

Dans les années quatre-vingt, la première approximation du champ de contrainte microscopique a été dérivée des propriétés des composants, de la micro géométrie du composite et des macros charges appliquées. Plus tard, la convergence de la périodicité de la structure était prouvée pour les deux échelles d'homogénéisation par [1, 2]. En fait, les techniques de changement d'échelles [3, 4] permettent au moins formellement de mettre à l'échelle l'information microstructurale dans les équations macroscopiques décrivant le milieu homogénéisé. Les méthodes de changement d'échelles offrent ainsi a priori un cadre très général pour étudier la relation entre physique à l'échelle macroscopique et structure à l'échelle microscopique. L'étude complète et prédictive de cette relation reste néanmoins délicate vue la complexité de la microstructure et la complexité des processus physiques. Dans le présent article, nous sommes ramenés sur le cas d'un milieu poreux saturé périodique (herbes couchées) dont la périodicité est obtenue lors de la séparation d'échelle. En outre, la déformation viscoélastique de la structure à l'échelle microscopique est donnée par la loi de Kelvin-Voigt en s'appuyant sur le principe de superposition de Boltzmann et celle de la dynamique. Par ailleurs, la méthode de la dérivation à double échelle a été introduite et après avoir introduit des espaces fonctionnels convenables à la résolution du problème nous sommes arrivés à des problèmes variationnelles. Enfin, sur l'étude du comportement macroscopique, on est parvenue à constater que la relation contrainte-déformation reste valable.

2. Méthodologie

2-1. Homogénéisation des structures périodiques

a) Définition d'homogénéisation

L'homogénéisation est la théorie qui étudie les méthodes de *moyennisation* dans les équations aux dérivées partielles. En d'autres termes, l'homogénéisation permet de trouver un modèle homogénéisé d'un problème originalement posé dans un milieu très hétérogène. Il y a plusieurs méthodes techniques d'homogénéisation. On ne les citera pas toutes ici. Les trois méthodes les plus performantes sont : La méthode de modélisation statique rendue performante par [5], la méthode de prise de moyen développée par [6] et la méthode d'homogénéisation des structures périodiques introduite par [7, 8] en 1980. Cette dernière technique permettra d'étudier le cas d'un milieu poreux.

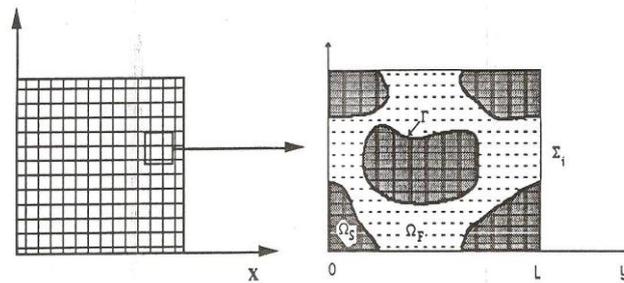


Figure 1 : Représentation des deux échelles

b) Méthode homogénéisation des structures périodiques (HSP)

Dans le cas d'un milieu réellement périodique, il existe une méthode asymptotique adaptée. On suppose que deux échelles peuvent être identifiées dans le problème traité, l'une macroscopique et l'autre microscopique. Le principe de l'homogénéisation consiste à envisager les deux échelles séparément. Comme les deux échelles sont fixes, ces deux variables ne sont pas indépendantes, puisque l'on a :

$$y = \frac{1}{\epsilon} x, \quad \epsilon \ll 1$$

où, ϵ le rapport entre une taille caractéristique microscopique et une longueur macroscopique ; x Variable de position macroscopique ; y Variable microscopique.

Ainsi une fonction u s'écrira formellement comme une fonction g de deux variables correspondant aux deux

échelles : $u(x) \equiv g\left(x, \frac{1}{\epsilon}x\right)$

où, u le champ réel ; g La fonction à 2 échelles correspondantes.

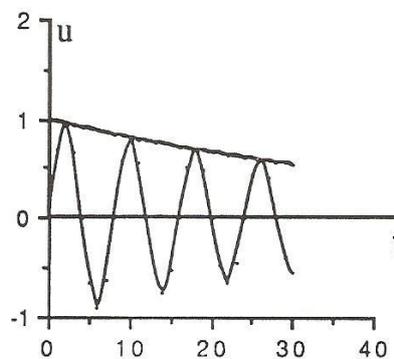


Figure 2 : Mise en évidence de l'influence du petit paramètre

On cherche alors u^ϵ sous la forme de développement asymptotique :

$$u^\epsilon = u^0(x,y) + \epsilon u^1(x,y) + \epsilon^2 u^2(x,y) + \dots, \quad (1)$$

Les u^i sont périodiques en y . La série du second membre n'est pas nécessairement convergente, le développement asymptotique est à comprendre au sens où, pour tout n , on a :

$$u^\epsilon = \sum_{i=0}^n \epsilon^i u^i(x, y) + O(\epsilon^n) \quad (2)$$

L'idée est de considérer les variables lentes et rapides comme deux variables indépendantes, ce qui amène à redéfinir l'opération de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (3)$$

Ce qui donne donc en appliquant (c) à (b) :

$$\frac{du^\epsilon}{dx_i} = \epsilon^{-1} \frac{\partial u^0}{\partial y_i} + \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u^1}{\partial y_i} \right) + \epsilon \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_i} + \frac{\partial u^2}{\partial y_i} \right) + \dots \quad (4)$$

Il s'agit ensuite d'injecter le développement asymptotique de u^ϵ et de ses dérivées dans l'équation d'origine, puis d'identifier les termes de même puissance en ϵ pour obtenir un système d'équation aux dérivées partielles sur les u^i .

2-2. Étude de la déformation de la structure solide d'un milieu poreux

a. Définition d'un milieu poreux

Un milieu poreux est un milieu comportant deux phases :

- une structure solide à l'intérieur de laquelle se trouvent des cavités appelées aussi des pores qui sont reliées entre elles (au moins partiellement) pour rendre possible l'écoulement de la phase fluide ;
- une phase fluide qui occupe les pores ou qui s'écoule à travers elles.

La structure solide peut être classée en 2 catégories qui sont les structures rigides (indéformables) et les structures déformables (les déformations sont supposées viscoélastiques). Les structures solides peuvent être caractérisées par différents coefficients intrinsèques :

- la porosité n qui est le rapport du volume des pores au volume total ;
- la perméabilité k qui est interprétée comme la capacité du milieu à se laisser traverser par le fluide. k dépend essentiellement de la géométrie des pores ;
- les différents coefficients viscoélastiques de la structure solide s'il s'agit d'une structure déformable.

En outre, la phase fluide peut être elle-même biphasique (solide-liquide ; gaz-liquide) ou monophasique.

b. Équation dynamique du squelette

Pour décrire la déformation des particules de la structure solide et les conditions à l'interface entre les domaines fluide et solide, nous supposons que le matériau est viscoélastique :

$$\left\{ \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial t} v_i^{sq} + v_j^{sq} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i^{sq} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \text{ sur } \Omega_s \right. \quad (5,1)$$

$$\left\{ \sigma_{ij}^{sq} = R_{ijkl} * \dot{\epsilon}_{kl} \right. \quad (5,2)$$

$$\left\{ v^s = v^{mel} \text{ sur } \Omega_s \cap \Omega_f \right. \quad (5,3)$$

$$\left\{ \sigma_{ij}^{sq} . n_j = \sigma_{ij}^{mel} . n_j \text{ sur } \Omega_s \cap \Omega_f \right. \quad (5,4)$$

où, ρ_s est la masse volumique du squelette ; u_s est le déplacement de structure solide ; R_{ijkl} : étant la fonction de relaxation

On admet que le matériau étudié est homogène isotrope et non-vieillissant, la fonction de relaxation ne dépend que du variable (t)

$$R_{ijkl}(x, t) = R_{ijkl}(t) = \lambda(t) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu(t) \delta_{ik} \delta_{jl}$$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial x_j} (R_{ijkl} * \dot{\epsilon}_{kl}) = R_{ijkl} * \frac{\partial}{\partial x_j} (\dot{\epsilon}_{kl})$$

σ_{ij}^{sq} Tenseur de contrainte pour le squelette

2-3. Équations dynamique du mélange

En adoptant l'étude fait par Olivier BRIVOIS [9] on a :

❖ Conservation de la masse du mélange :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i^{mel}) = 0 \quad (6)$$

❖ Conservation de la masse des sédiments :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho Y) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho Y v_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} (-J_i^{Dt,s}) \quad (7)$$

Y : Fraction massique

❖ Conservation de la quantité de mouvement du mélange :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho v_\alpha v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{mel} \quad (8)$$

❖ Loi de comportement pour les flux :

$$J_i^{Dt,s} = -\rho D_{eff} \frac{\partial Y}{\partial x_i} \quad (9)$$

❖ Loi de comportement du mélange :

$$\sigma_{ij}^{mel} = -p\delta_{ij} + 2\mu_{eff}\varepsilon_{ij} + \lambda_{eff}divv\delta_{ij} \quad (10)$$

Nous allons supposer que : le matériau étudié est incompressible alors la masse volumique ρ du mélange est constante

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) = 0 \quad \text{D'où : } div(\vec{v}^{mel}) = 0$$

L'Équation se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j^{mel}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i^{mel} v_j^{mel}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{mel} \text{ sur } \Omega_{mel} \quad (11,1) \\ \sigma_{ij}^{mel} = -p\delta_{ij} + 2\mu_{eff}\varepsilon_{ij} \quad (11,2) \\ \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i^{mel}) = 0 \text{ sur } \Omega_{mel} \quad (11,3) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho Y) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho Y v_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(-J_i^{Dt,s}) \quad (11,4) \\ J_i^{Dt,s} = -\rho D_{eff} \frac{\partial Y}{\partial x_i} \quad (11,5) \\ v^s = v^{mel} \text{ sur } \Omega_s \cap \Omega_f \quad (11,6) \\ \sigma_{ij}^{sq} n_j = \sigma_{ij}^{mel} n_j \text{ sur } \Omega_s \cap \Omega_f \quad (11,7) \end{array} \right. \quad (11)$$

2-4. Simplification et normalisation

On introduit le terme adimensionnel qui évalue le poids relatif des termes inertiel par rapport aux termes des contraintes.

$$\zeta = \frac{\left| \rho_s \left(v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right|} = \frac{\rho V}{\frac{R}{l^2}} = \mathcal{G} (\varepsilon^{-2})$$

L'Équation (5) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial t} v_i^{sq} + \varepsilon^2 v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i^{sq} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \text{ sur } \Omega_s \quad (5,1)' \\ \sigma_{ij}^{sq} = R_{ijkl} * \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (5,2)' \\ v^{sq} = v^{mel} \text{ sur } \Omega_s \cap \Omega_f \quad (5,3)' \\ (R_{ijkl} * \dot{\varepsilon}_{kl}) n_j = (-p\delta_{ij} + \varepsilon^2 2\mu\varepsilon_{ij}) n_j \text{ sur } \Omega_s \cap \Omega_f \quad (5,4)' \end{array} \right. \quad (5')$$

De même pour le mélange et on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_{mel} \left[\frac{\partial}{\partial t} (v_i^{mel}) + \epsilon^2 v_j^{mel} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i^{mel}) \right] &= \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{mel} \text{ sur } \Omega_{mel} & (11,1)' \\ \sigma_{ij}^{mel} &= -p \delta_{ij} + 2 \mu_{eff} \epsilon_{ij} & (11,2)' \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i^{mel}) &= 0 \text{ sur } \Omega_{mel} & (11,3)' \\ \frac{\partial}{\partial t} (Y) + v_i^{mel} \frac{\partial}{\partial x_i} (Y) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{eff} \frac{\partial Y}{\partial x_j} \right) & (11,4)' \\ v^{sq} &= v^{mel} \text{ sur } \Omega_s \cap \Omega_f & (11,5)' \\ (R_{ijkl} * \dot{\epsilon}_{kl}) n_j &= (-p \delta_{ij} + \epsilon^2 2 \mu \epsilon_{ij}) n_j \text{ sur } \Omega_s \cap \Omega_f & (11,6)' \end{aligned} \right. \quad (11')$$

Après avoir injecté le développement (4) dans les **Équations (5,1)'; (5,4)'** et en identifiant les termes de puissance de ϵ , il vient :

En ϵ^{-2}

$$\left\{ \begin{aligned} u^{(0)}(x, y) \Omega &- \text{periodic} \\ \frac{\partial}{\partial y_j} (R_{ijkl}(t) * \dot{\epsilon}_{kl}^y(u^{(0)})) &= 0 \text{ sur } \Omega_s & (12,1) \\ (R_{ijkl}(t) * \dot{\epsilon}_{kl}^y(u^{(0)})) n_j &= 0 \text{ sur } \Omega_s \cap \Omega_f & (12,2) \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Concernant la pression, de l'ordre ϵ^{-1} **l'Équation (11,1)'** donne $\nabla_y p^0 = 0$ d'où $p^0(x, y) = p^0(x)$

En ϵ^{-1} :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} \{ R_{ijkl}(t) * [\dot{\epsilon}_{kl}^y(u^1) + \dot{\epsilon}_{kl}^x(u^0)] \} &= 0 \text{ sur } \Omega_s & (13,1) \\ \{ R_{ijkl}(t) * [\dot{\epsilon}_{kl}^y(u^1) + \dot{\epsilon}_{kl}^x(u^0)] \} n_j &= P^0 n_j \text{ sur } \Omega_s \cap \Omega_f & (13,2) \end{aligned} \right. \quad (13)$$

une constante additive près, la formulation variationnelle correspondant à ce problème est comme suit

$$\forall W \in E$$

$$\int_{\Omega} R_{ijkl}(t) * \dot{\epsilon}_{kl}^y(u^1) \dot{\epsilon}(W) d\Omega = \int_{\Omega} \left(-R_{ijkl}(t) * \dot{\epsilon}_{kl}^x(u^0) \dot{\epsilon}(W) + P^0 \frac{\partial}{\partial y_j} W_j \right) d\Omega \quad (14)$$

Dans le vecteur W Ω -periodique de l'espace E , une moyenne nulle dans la cellule est associée au produit scalaire approprié. La linéarité du problème mène à :

$$u_{si}^1 = u_{si}(x) + \zeta_{ikl} * \dot{\epsilon}_{kl}^x(u^0) + b_i P^0 \quad (15)$$

On introduit en outre les développements asymptotiques pour chaque inconnue

$$\bar{v}^\epsilon(x, y) = \sum_{i=0}^n \bar{v}^i; p^\epsilon(x, y) = \sum_{i=0}^n \bar{p}^i$$

$\bar{v}^i; \bar{p}^i$ sont Ω -périodique pour le variable y

On à successivement en identifiant le terme :

\bar{v}^{-1} et \bar{v}^0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}_y \bar{p}^{(0)} = 0 \Rightarrow \bar{p}^{(0)} = \bar{p}^{(0)}(x) \end{array} \right. \quad (16,1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{eff} \Delta_y \bar{v}^{(0)} - \bar{\nabla}_x \bar{p}^{(0)} - \bar{\nabla}_y \bar{p}^{(1)} = \rho_{eff} \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}^{(0)} \end{array} \right. \quad (16,2) \tag{16}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}_y \cdot \bar{v}^{(0)} = 0 \Rightarrow \bar{v}^{(0)} = \bar{v}^{(0)}(x) \end{array} \right. \quad (16,3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}_x \cdot \bar{v}^{(0)} + \bar{\nabla}_y \cdot \bar{v}^{(1)} = 0 \end{array} \right. \quad (16,4)$$

De plus $\bar{v}^{(0)}; \bar{v}^{(1)}; \bar{p}^{(0)}; \bar{p}^{(1)}$ sont Ω -périodique

$$\bar{p}^{(1)}(x, y) = a \bar{\nabla}_x \bar{p}^{(0)} + \bar{p}^{(1)}(x)$$

On pose $\bar{v}^{(0)} = \bar{w}^{(0)} + \bar{v}_s^{(0)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{eff} \Delta_y \bar{w}^{(0)} - \bar{\nabla}_y (\bar{p}^{(1)}) - \rho_{eff} \frac{\partial}{\partial t} \bar{w}^{(0)} = \bar{\nabla}_x \bar{p}^{(0)} + \rho_{eff} \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}_s^{(0)} \end{array} \right. \quad (17,1) \tag{17}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}_y \cdot \bar{w}^{(0)} = 0 \end{array} \right. \quad (17,2)$$

En vue de démontrer l'existence et l'unicité de l'Équation (17) à l'aide de théorème de Lax-milgram, on introduit l'espace de Hilbert $H(\Omega)$.

Tel que $H(\Omega) = \{ \bar{v} \in [H^1(\Omega)]^3 / \text{vest } \Omega - \text{périodique}, \text{div } \bar{v} = 0 \text{ dans } \Omega, \bar{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$

avec, $H^1(\Omega) = \left\{ f, f \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y_i} \in L^2(\Omega) i = 1, 2, 3 \right\}$ est un espace de Sobolev et $\partial\Omega$ est la frontière

de Ω . La formulation variationnelle correspond à ce problème est définit comme suit : $\forall W \in H(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left(\mu_{eff} \Delta_y \bar{w}^{(0)} - \bar{\nabla}_y (\bar{p}^{(1)}) - \rho_{eff} \frac{\partial}{\partial t} \bar{w}^{(0)} \right) W d\Omega = \int_{\Omega} \left(\bar{\nabla}_x \bar{p}^{(0)} + \rho_{mel} \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}_s^{(0)} \right) W d\Omega$$

Et la linéarité du problème mène a :

$$\langle \bar{v}_{mel}^0, -n \bar{v}_s^0 \rangle = K / \mu \left[\text{grad} P + \rho_{mel} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{v}_s^{(0)}) \right] \tag{18}$$

D'autre part :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{sij}^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{sij}^{(0)} &= \rho_s \frac{\partial}{\partial t} v_{si}^{(0)} & (19,1) \\ \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}^{mel(1)} + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{fij}^{mel(0)} &= \rho_{mel} \frac{\partial}{\partial t} v_i^{mel(0)} & (19,2) \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma^{(1)} &= \begin{cases} \sigma_{sij}^{(1)}(x, y) \text{ sur } \Omega_s \\ \sigma_{ij}^{mel(1)}(x, y) \text{ sur } \Omega_f \end{cases} \\ \text{et} \\ \sigma^{(0)} &= \begin{cases} \sigma_{sij}^{(0)}(x, y) = R_{ijkl}(t) * [\dot{\epsilon}_{kl}^y(u^1) + \dot{\epsilon}_{kl}^x(u^0)] = [\dot{\epsilon}_{kl}^y(\varepsilon_{kl}) + \delta_{ij}] R_{ijkl}(t) * \dot{\epsilon}_{kl}^x(u^0) + R_{ijkl}(t) * \dot{\epsilon}^y(b_i) P^0 \text{ sur } \Omega_s \\ \sigma_{ij}^{mel(0)}(x, y) = P^0 \text{ sur } \Omega_f \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Lorsqu'on fait l'addition de (19,1) et (19,2) puis on intègre sur Ω

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \langle \sigma^1 \rangle \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \langle \sigma^1 \rangle n_j ds = 0 \text{ Par périodicité}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \sigma^0 \rangle = \rho \frac{\partial}{\partial t} \langle v^0 \rangle$$

$$\text{avec, } \langle v^0 \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \left[\int_{\Omega_s} v_s^0 d\Omega + \int_{\Omega_f} v_{mel}^0 d\Omega \right] = (1-n) \langle v_s^0 \rangle + n \langle v_{mel}^0 \rangle$$

3. Résultats et discussion

Le comportement macroscopique du matériau diphasique est en définitive par le système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \sigma^0 \rangle &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \langle v^0 \rangle \\ \langle \sigma^0 \rangle &= C * \dot{\epsilon} + \alpha P \\ \langle v_{mel}^0 \rangle - n \langle v_s^0 \rangle &= K / \mu \left[grad P + \rho_{eff} \frac{\partial}{\partial t} (v_s^{(0)}) \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} (Y) + \langle v_{mel}^0 \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} (Y) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{eff} \frac{\partial Y}{\partial x_j} \right) \\ div(\langle v_{mel}^0 \rangle - n \langle v_s^0 \rangle) &= -\alpha * \dot{\epsilon}(u_s^0) + \beta \cdot P \end{aligned} \right. \quad (20)$$

ou,

$$\left\{ \begin{aligned} \beta &= \langle \text{div}(b) \rangle \\ C_{ijkl} &= \langle R_{ijkl} + R_{ijmn} * \dot{\varepsilon}_{mn}^y(\zeta_{kl}) \rangle \\ \alpha_{ij} &= n \delta_{ij} + \langle R_{ijmn} * \dot{\varepsilon}_{mn}^y(b) \rangle \\ \rho &= (1-n) \rho_s + n \rho_{mel} \end{aligned} \right.$$

Or : $n \text{div}_x u^0 = \int \text{div}_y (u_s^1) d\Omega$ par périodicité. Cela implique : $0 = -\alpha * \dot{\varepsilon}(u_s^0) + \beta \cdot P$. Et nous avons

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \sigma^0 \rangle &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \langle v^0 \rangle \\ \langle \sigma^0 \rangle &= \langle C \rangle * \dot{\varepsilon} \\ \langle v_{mel}^0 \rangle - n \langle v_s^0 \rangle &= K / \mu \left[\text{grad} P + \rho_{mel} \frac{\partial}{\partial t} (v_s^{(0)}) \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} (Y) + \langle v_{mel}^0 \rangle_i \frac{\partial}{\partial x_i} (Y) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{eff} \frac{\partial Y}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \right. \tag{21}$$

avec, $\langle C \rangle = \langle R_{ijkl} + R_{ijmn} * \dot{\varepsilon}_{mn}^y(\zeta_{kl}) \rangle + \beta^{-1} \alpha_{ij} \alpha_{kl}$

En admettant que l'écoulement est périodique c'est-à-dire sous l'action de vague. Cette dernière **Équation** peut s'écrire sous une autre forme en posant :

$$\left\{ \begin{aligned} u_{mel}^0 &= u_{melx}^0 e^{i\omega t} \\ u_s^0 &= u_{sx}^0 e^{i\omega t} \\ p^0 &= p_x^0 e^{i\omega t} \end{aligned} \right. \tag{22}$$

Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \sigma^0 \rangle &= -U^0 \omega^2 e^{i\omega t} \\ \langle \sigma^0 \rangle &= \langle C \rangle . \varepsilon \\ i\omega \langle u_{melx}^0 \rangle - n \langle u_{sx}^0 \rangle &= K / \mu \left[\text{grad} p_x^0 - \rho_{mel} \omega^2 u_{melx}^0 \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} (Y) + i\omega \langle u_{melx}^0 \rangle e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial x_i} (Y) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{eff} \frac{\partial Y}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \right. \tag{23}$$

ou,

$$\left\{ \begin{aligned} U^0 &= \left[-(1-n) \rho_s \langle u_s^0 \rangle - n \rho_{mel} \langle u_{mel}^0 \rangle \right] \\ \langle C \rangle &= \langle C \rangle * e^{i\omega t} \end{aligned} \right.$$

Lorsqu'on applique la transformée de Laplace à l'**Équation (23)** nous obtenons les mêmes résultats trouver par [10].

4. Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié la déformation viscoélastique des structures solides dans un milieu poreux saturé et périodique. Sur l'échelle des hétérogénéités, la déformation de la microstructure est régie par la loi de Kelvin-Voigt et l'équation dynamique. Lors de l'introduction de la dérivation à double échelle, nous avons introduit sous forme de développement asymptotique les champs à déterminer qui sont les champs de déplacement des particules et aussi les champs de contrainte afin de tenir compte des effets locaux liés à la complexité de la microstructure. Toutefois, des espaces fonctionnels ont été introduits pour pouvoir résoudre les problèmes variationnels. Les équations ainsi obtenues sont des équations aux dérivées partielles de type elliptique. Ainsi, pour prouver l'existence des différents ordres de solutions nous nous sommes recourus au théorème de Lax-Milgram. En outre, on est arrivé à la conclusion que la relation contrainte-déformation reste valable sur le comportement macroscopique. Enfin, pour la détermination du comportement macroscopique moyen, on s'est servi de la prise de moyenne.

Références

- [1] - PHILIPP EMANUEL STELZIG, On problems in homogenization and two-scale convergence, (2012)
- [2] - ZAKARIA HABIBI, Homogénéisation et convergence à deux échelles lors d'échanges thermiques stationnaires et transitoires, (2011)
- [3] - TIEN DUNG TRAN NGOC, Transport de solutés dans un milieu à double-porosité non saturé. Modélisation par homogénéisation & applications, (2008)
- [4] - DONGWOO SHEEN, A Darcy's law for a single-phase fluid in a porous medium composed of two solid phases, Vol. 2, N° 6 (2007) 127 - 136
- [5] - E-KRONER, Statistical Continuum Mechanics, Springer Verlag Berlin
- [6] - S. WHITAKER, Flow in porous media : A theoretical Derivation of darcy's Law in Porous Media, (1986) 3 - 25 p.
- [7] - BENSOUSSAN .J-L. LIONS and G. PAPANICOLAOU, Asymptotic Analysis of Periodic structures, North - Holland, Amsterdam, (1978)
- [8] - E-SANCHEZ-PALENCIA-Non-homogeneous media and vibration theory. Springer-Verlag, (1980).
- [9] - OLIVIER BRIVOIS, Contribution à la modélisation de l'érosion de fortes pentes par un écoulement turbulent diphasique, Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille II, (2005)
- [10] - C. BOUTIN, J. L. AURIAULT, Dynamic behavior of porous media saturated by a viscoelastic fluid. Application to bituminous concretes