Afrique SCIENCE *13(3) (2017) 411 - 424*
ISSN 1813-548X, http://www.afriquescience.info

Modélisation et simulation numérique de la propagation du son dans un milieu poreux flexible

Alain Jean de Dieu RAVOLANIRINA[1], Jose Marie Michel ANDRIAMAMPIANINA[2], Mamy Nirina RASOLOARIJAONA[1*], Adolphe RATIARISON[1] et Aro Pascal RATSIMBAZAFY[1]

[1] Laboratoire de la Dynamique de l'Atmosphère, du Climat et des Océans (DyACO), Faculté des sciences, Université d'Antananarivo, Madagascar
[2] Institut Supérieur de Technologie d'Antananarivo, Madagascar

* Correspondance, courriel : *mahitavelo@gmail.com*

Résumé

Cette étude a pour but de déterminer les propriétés acoustiques des milieux poreux tels que la mousse et la laine de verre. Elle est faite à partir d'une démarche multi-échelle et multi-physique. Pour cela, un système d'équations macroscopiques sur un matériau homogène équivalent est établi ; ces équations prennent compte de la microstructure du domaine. La fréquence de vibration est fixée et le matériau pris en compte est supposé périodique. La modélisation du problème conduit à l'obtention de deux systèmes de cellule : un système de Stokes pour le fluide et un système de type viscoélastique linéaire pour décrire le déplacement du matériau. Ainsi, à l'échelle macroscopique, on obtient un système couplé non intuitif. Des résultats numériques viennent ensuite illustrer le travail.

Mots-clés : *ondes acoustiques, milieu poreux, homogénéisation.*

Abstract

Modeling and numerical simulation of sound propagation in a flexible porous medium

The purpose of this study is to determine the acoustic properties of porous media such as foam and glass wool. It is based on a multi-scale and multi-physical approach. For this, a system of macroscopic equations on an equivalent homogeneous material is established; These equations take into account the microstructure of the domain. The frequency of vibration is fixed and the used material is assumed to be periodic. Modeling the problem leads to get two cell systems : a Stokes system for the fluid; And a linear viscoelastic type system to describe the displacement of the material. Thus, on a macroscopic scale, a non-intuitive coupled system is obtained. Then, the work is illustrated by numerical results.

Keywords : *acoustic wave, porous environment, homogenization.*

Nomenclature

ε	*petit paramètre représentatif de l'échelle microscopique*
f	*fluide*
s	*solide*
i, j, k, l	*indice sur la dimension de l'espace*
ρ_f	*masse volumique du fluide, kg.m^3*
ρ_s	*masse volumique du solide du milieu, kg.m^3*
η_f	*viscosité cinématique du fluide, Pa.s*
η_s	*amortissement structurel du solide, s^{-1}*
λ , μ	*coefficients de Lamés, Pa.s*
ϕ	*porosité du milieu*
ω	*fréquence, s^{-1}*
v_f	*vitesse du fluide, m.s^{-1}*
u_s	*déplacement du solide, m*
u_f	*déplacement du fluide, m*
p	*pression du fluide, N/m^2*
k_{ij}	*conductivité hydraulique, m^2*
$\vec{n}$	*vecteur unitaire normale*
$\varepsilon(v_f)$	*tenseur de déformation de vitesse du fluide*
$\varepsilon(u_s)$	*tenseur de déformation du solide*
x	*variable macroscopique*
y	*variable microscopique*
Ω_f	*domaine fluide*
Ω_s	*domaine solide*
$\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$	*domaine diphasique*

1. Introduction

De manière concomitante avec la modernisation de la société, l'exigence de réduction des nuisances sonores est de plus en plus importante. Elle concerne plusieurs domaines de l'industrie tels que le bâtiment, les transports (automobile, ferroviaire, aéronautique, etc.). Dans ce domaine, les matériaux poreux sont connus pour leurs qualités d'absorption sonore et sont donc couramment utilisés dans l'industrie [1 - 3]. En effet, lorsque ces matériaux font obstacle à l'onde acoustique, celle-ci induit dans le milieu poreux des mouvements relatifs de l'air dans les pores du matériau, et une partie de son énergie est dissipée sous forme de chaleur par des pertes liées aux effets visqueux, thermiques ou élastiques [4 - 6]. De plus, elles permettent de réduire la conduction des vibrations par le squelette tout en absorbant et en réfléchissant les ondes acoustiques qui se propagent dans la phase fluide du matériau poreux [7 - 8]. Notre travail a pour objectif, de proposer et d'étudier des modèles décrivant la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu poreux flexible saturé par un fluide incompressible.

2. Méthodologie

2-1. Méthode d'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation permet de décrire le comportement d'un milieu hétérogène, en le remplaçant par un milieu homogène équivalent. Le principe de la méthode, qui est fondé sur les développements asymptotiques, est présenté dans les ouvrages de Bensoussan et al. (1978) et Sanchez-Palencia (1980). L'hypothèse fondamentale de l'homogénéisation est la séparation d'échelles concernant des quantités géométriques et physiques. Elle se traduit par le rapport entre la longueur caractéristique microscopique l et la longueur caractéristique macroscopique L qui est très petit devant l'unité.

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1 \tag{1}$$

La relation (1) est équivalente à l'existence d'un VER (Volume élément représentative). La présence des deux échelles se traduit par l'introduction de deux variables d'espace : les variables microscopiques y et les variables macroscopiques x. L'opérateur de la dérivée spatiale est donc remplacé par son équivalent à deux échelles

$$\nabla_y \rightarrow \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y \tag{2}$$

La méthode consiste à rechercher la description à l'échelle macroscopique pour un milieu équivalent continu. Les grandeurs physiques inconnues du problème sont exprimées sous forme de développements asymptotiques :

$$\psi^{(i)}(x, y) = \psi^{(0)}(x, y) + \varepsilon\psi^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2\psi^{(2)}(x, y) + \dots \tag{3}$$

où, $\psi^{(i)}(x, y)$ ***sont y-périodiques.***

2-2. Formulation du problème

2-2-1. Description à l'échelle microscopique

Les ***Équations*** qui correspondent au fluide - structure sont regroupées dans ce système :

$$\begin{cases} \rho_f \dfrac{\partial v_f}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma^f\left(v_f\right) \quad \text{dans } \Omega_f \\ \nabla \cdot v_f = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ \rho_s \dfrac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma^s\left(u_s\right) \quad \text{dans } \Omega_s \\ v_f = \dfrac{\partial u_s}{\partial t} \quad \text{sur } \Gamma \\ \sigma^f\left(v_f, p\right)n = \sigma^s\left(u_s\right)n \quad sur \;\; \Gamma \end{cases} \tag{4}$$

avec, $\sigma^f\left(v_f, p\right) = -pId + 2\eta_f\,\varepsilon\left(v_f\right)$; $\sigma^s\left(u_s\right) = \lambda\left[1+\eta_s\dfrac{\partial}{\partial t}\right]u_{k,k}\delta_{ij} + \mu\left[1+\eta_s\dfrac{\partial}{\partial t}\right]\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)$

Dans ces relations λ , μ correspondent aux termes purement élastiques. Puis, η_s correspond au terme purement visqueux.

2-2-2. Problème local après linéarisation

En régime harmonique, les ***Équations*** dans (4) deviennent :

$$\begin{cases} -\rho_f \omega^2 u_f = -\nabla p + j\omega\left(\eta_f \Delta u_f\right) \text{ dans } \Omega_f \\ \nabla \cdot u_f = 0 \text{ dans } \Omega_f \\ \rho_s \omega^2 u_s = -\left(\lambda^* + \mu^*\right)\nabla\left(\nabla \cdot u_s\right) - \mu^* \Delta u_s \text{ dans } \Omega_s \\ u_f = u_s \text{ sur } \Gamma \\ \sigma^f\left(u_f, p\right) n = \sigma^s\left(u_s\right) n \text{ sur } \Gamma \end{cases} \tag{5}$$

avec, $\sigma^f\left(u_f, p\right) = -pId + 2j\omega\eta_f\,\varepsilon\left(u_f\right)$ ***et*** $\sigma^s\left(u_s\right) = \lambda^{*\,tr}\varepsilon\left(u_s\right)\delta_{ij} + 2\mu^*\varepsilon\left(u_s\right)$

$\lambda^* = \lambda\left(1 + \eta_s j\right)$ ***) et*** $\mu^* = \mu(1 + \eta_s j)$

2-3. Normalisation

La normalisation des ***Équations de (5)*** donne :

$$\begin{cases} -\rho_f \omega^2 u_f = -\nabla p + \varepsilon^2 j\omega\left(\eta_f \Delta u_f\right) \text{ dans } \Omega_f \\ \nabla \cdot u_f = 0 \text{ dans } \Omega_f \\ \rho_s \omega^2 u_s = -\left(\lambda^* + \mu^*\right)\nabla\left(\nabla \cdot u_s\right) - \mu^* \Delta u_s \text{ dans } \Omega_s \\ u_f = u_s \text{ sur } \Gamma \\ \left[-pId + j\omega\varepsilon^2\eta_f\ \varepsilon\left(u_f\right)\right] n = \left[\lambda^{*\,tr}\varepsilon\left(u_s\right) Id + 2\mu^*\varepsilon\left(u_s\right)\right] \text{ sur } \Gamma \end{cases} \tag{6}$$

2-4. Application de la méthode d'homogénéisation

2-4-1. Équation fluide

A l'ordre ε^0 , les ***Équations*** obtenues sont :

$$\begin{cases} \rho_f \omega^2 u^0 + i\omega\left(\eta_f \Delta_y u^0\right) - \left(\nabla_x p^0 + \nabla_y p^1\right) = -\rho_f \omega^2 u_s^0 - i\omega\left(\eta_f \Delta_y u_s^0\right) \\ \left(-p^0 Id\right) n = \left\{\lambda^*\left(\nabla_x \cdot u_s^0 + \nabla_y \cdot u_s^1\right) Id + 2\mu^*\left[\varepsilon_x\left(u_s^0\right) + \varepsilon_y\left(u_s^1\right)\right]\right\} n \end{cases} \tag{7}$$

Le problème variationnel donnant u^0 s'écrit alors :

$$\rho_f \omega^2 \int_{\Omega_f} u^0 \overline{w}\, d\Omega - i\omega\eta_f \int_{\Omega_f} \nabla_y u^0 \nabla_y \overline{w}\, d\Omega = \int_{\Omega_f} \left[\nabla_x p^0 - \rho_f \omega^2 u_s^0\right] \overline{w}\, d\Omega$$

Puis par linéarité :

$$i\omega \eta_f u^0 = -k(x,y)\left[\nabla_x p^0 - \rho_f \omega^2 u_s^0\right] \tag{7a}$$

$$p^1 = -a(x,y)\left[\nabla_x p^0 - \rho_f \omega^2 u_s^0\right] + \tilde{p}^1(x) \tag{7b}$$

Le tenseur $k_{ij}(x,y)$ et le vecteurs $a_i(x,y)$ sont les solutions des problèmes de cellule (8) donnés par :

$$\begin{cases} -\dfrac{i\omega\rho_f}{\eta_f}k + \Delta_y k - \nabla_y \mathrm{a} = I \quad sur\ \Omega_f \\ \nabla_y \cdot k = 0 \quad sur\ \Omega_f \\ k = 0 \quad sur\ \Gamma \end{cases} \tag{8}$$

2-4-2. Équation solide et condition aux limites

A l'ordre ε^{-2}, il y a :

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot \sigma_s^{-1} = 0 \\ \left\{\sigma_s^{-1}\right\} n = 0 \end{cases} \tag{9}$$

avec, $\sigma_s^{-1} = \lambda^* \nabla_y \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_y\left(u_s^0\right)$

A l'ordre ε^{-1} :

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot \sigma_s^{-1} + \nabla_y \cdot \sigma_s^0 = 0 \\ \left(\sigma_s^{-1}\right) n = 0 \end{cases} \tag{10}$$

avec, $\sigma_s^0 = \lambda^*\left(\nabla_x \cdot u_s^0 + \nabla_y \cdot u_s^1\right) Id + 2\mu^*\left[\varepsilon_x\left(u_s^0\right) + \varepsilon_y\left(u_s^1\right)\right]$

Si on multiplie chaque terme de la relation (10) par $\overline{w}$, et en intégrant sur Ω_s, on obtient le problème variationnel suivant :

$$\int_{\Omega_s} \nabla_y \cdot \sigma_s^0 \overline{w}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega_s} \sigma_s^0 .n\overline{w}\, d\Gamma - \int_{\Omega_s} \sigma_s^0 \nabla_y \overline{w}\, d\Omega = 0$$

En tenant compte de la condition aux limites : $\left\{-p^0 Id\right\} n = \left\{\sigma_s^0\right\} n$

$$\int_{\Omega_s}\left[\lambda^* \nabla_y \cdot u_s^1 Id + 2\mu\, \varepsilon_y\left(u_s^1\right)\right]\nabla_y \overline{w}\, d\Omega = \\ -\int_{\Omega_s}\left[\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right]\nabla_y \overline{w}\, d\Omega - \int_{\Omega_s} p^0 \nabla_y \cdot \overline{w}\ Id\ \ d\Omega$$

Par linéarité :

$$u_s^1(x,y) = \zeta_{kl}\left[\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right] + \kappa_k p^0 + \overline{u}_s^1(x) \tag{11}$$

A l'ordre ε^0 :

$$\begin{cases} -\rho_s \omega^2 u_s^0 = \nabla_x \cdot \sigma_s^0 + \nabla_y \cdot \sigma_s^1 \\ \left\{ -p^1 Id + 2\eta\, \varepsilon_y\left(u_s^0\right)\right\} n = \left(\sigma_s^1\right) n \end{cases} \tag{12}$$

avec, $\sigma_s^1 = \lambda^* \left(\nabla_x \cdot u_s^1 + \nabla_y \cdot u_s^2\right) Id + 2\mu^* \left[\varepsilon_x\left(u_s^1\right) + \varepsilon_y\left(u_s^2\right)\right]$

Le vecteur κ_k et le tenseur ζ_{kl} sont les solutions particulières de (10) :

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot \sigma_s^0 = \nabla_y \cdot \left[\lambda^* \nabla_y \cdot \left\{\zeta_{kl} \varepsilon_x\left(u_s^0\right) + \kappa_k p^0\right\} + 2\mu^* \varepsilon_y \left\{\zeta_{kl} \varepsilon_x\left(u_s^0\right) + \kappa_k p^0\right\}\right] = 0 \\ \left\{-p^0 Id\right\} n = \left\{\sigma_s^0\right\} n = \begin{Bmatrix} \lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right) \\ + \lambda^* \nabla_y \cdot \left[\zeta_{kl}\, \varepsilon_x\left(u_s^0\right) + \kappa_k p^0\right] Id + 2\mu^* \varepsilon_y\left[\zeta_{kl}\, \varepsilon_x\left(u_s^0\right) + \kappa_k p^0\right] \end{Bmatrix} n \end{cases} \tag{13}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_s^0 &= \lambda^* \nabla_y \cdot \kappa_k p^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_y\left(\kappa_k\right) p^0 \\ &+ \underbrace{\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right) + \lambda^* \nabla_y \cdot \left[\zeta_{kl} \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right] Id + 2\mu^* \varepsilon_y\left[\zeta_{kl} \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right]}_{\tilde{\sigma}_s^0} \end{aligned}$$

posons $\tilde{\sigma}_s^0 = \lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right) + \lambda^* \nabla_y \cdot \left[\zeta_{kl} \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right] Id + 2\mu^* \varepsilon_y\left[\zeta_{kl} \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right]$

Deux cas sont possibles à partir de la valeur de p^0 et de $\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right)$:

1er cas $p^0 = 1$ et $\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right) = 0$

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot \sigma_s^0 = \nabla_y \cdot \left[\lambda^* \nabla_y \cdot \kappa + 2\mu^* \varepsilon_y\left(\kappa\right)\right] = 0 \\ \left\{-Id\right\} n = \left\{\lambda^* \nabla_y \cdot \kappa + 2\mu^* \varepsilon_y\left(\kappa\right)\right\} n \end{cases} \tag{14}$$

2e cas $p^0 = 0$ et $\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right) \neq 0$

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot \tilde{\sigma}_s^0 = \nabla_y \cdot \left[\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right) + \lambda^* \nabla_y \cdot \left\{\zeta_{kl} \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right\} + 2\mu^* \varepsilon_y\left\{\zeta_{kl} \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right\}\right] = 0 \\ \left\{\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right) + \lambda^* \nabla_y \cdot \left[\zeta_{kl} \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right] + 2\mu^* \varepsilon_y\left[\zeta_{kl} \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right]\right\} n = 0 \end{cases} \tag{15}$$

D'où, l'expression de la contrainte solide est :

$$\sigma_s^0 = \tilde{\sigma}_s^0 + \left(\lambda^* \nabla_y \cdot \kappa Id + 2\mu^* \varepsilon_y\left(\kappa\right)\right) p^0$$

2-5. Description macroscopique

2-5-1. Équation fluide

A l'ordre ε^0 :

$$\rho_f \omega^2 u_f^0 + i\omega\left(\eta_f \Delta_y u_f^0\right) - \nabla_y p^1 = \nabla_x p^0 - \rho_f \omega^2 u_s^0 \quad \text{dans } \Omega_f$$
$$\nabla_x \cdot u_f^0 + \nabla_y \cdot u_f^1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_f$$
$$u_f^0 = u_s^0 \quad \text{dans } \Gamma$$

A l'ordre ε^1 :

$$u_f^1 = u_s^1 \quad \text{dans } \Gamma$$

or : $\begin{cases} u_s^1(x,y) = \zeta_{kl}\left[\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right] + \kappa_k p^0 + \overline{u}_s^1(x) \\ u_f^0 = u^0 + u_s^0 \end{cases}$

alors,

$$\nabla_x \cdot u^0 + \nabla_x \cdot u_s^0 = \nabla_y \cdot \zeta_{kl}\left\{\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right\} - \nabla_y \cdot \kappa_k p^0$$

En moyennant, on obtient ***l'Équation*** de continuité à l'échelle macroscopique :

$$\nabla_x \cdot \left\langle u^0 \right\rangle = \beta\, p^0 + \left\{\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right\}\left\langle \nabla_y \cdot \zeta_{kl} \right\rangle - \phi \nabla_x \cdot u_s^0 \tag{16}$$

avec, $\left\langle \cdot \right\rangle = \dfrac{1}{\Omega}\int_\Omega d\Omega$

2-5-2. Équation solide

Pour les ***Équations*** de conservations :

A l'ordre ε^{-1} :

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot \sigma_s^{-1} + \nabla_y \cdot \sigma_s^0 = 0 \\ \left(\sigma_s^{-1}\right) n = 0 \end{cases} \tag{17}$$

avec, $\tilde{\sigma}_s^0 = \lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x\left(u_s^0\right) + \lambda^* \nabla_y \cdot \left[\zeta_{kl}\, \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right] Id + 2\mu^* \varepsilon_y\left[\zeta_{kl}\, \varepsilon_x\left(u_s^0\right)\right]$

A l'ordre ε^0 :

$$-\rho_s \omega^2 u_s^0 = \nabla_x \cdot \sigma_s^0 + \nabla_y \cdot \sigma_s^1 \tag{18}$$

Par passage à la moyenne, cette ***Équation (18)*** devient :

$$-\rho_s \omega^2 u_s^0 (1-\phi) = \nabla_x \cdot \left\langle \sigma_s^0 \right\rangle \tag{19}$$

où, $\left\langle \sigma_s^0 \right\rangle = \left\langle \tilde{\sigma}_s^0 \right\rangle + \left[\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_s} \left(\lambda^* \nabla_y \cdot \kappa_k + 2\mu^* \varepsilon_y (\kappa_k) \right) d\Omega \right] p^0$

2-5-3. Équation macroscopique

Ainsi, les ***Équations*** obtenues pour l'échelle macroscopique sont regroupées dans (20).

$$\begin{cases} \left\langle \rho \right\rangle \omega^2 u_s^0 + \rho_f \omega^2 \left\langle u^0 \right\rangle = -\nabla_x \cdot \left\langle \tilde{\sigma}_s^0 \right\rangle + \nabla_x \cdot \alpha\, p^0 \\ \nabla_x \cdot \left\langle u^0 \right\rangle = \beta\, p^0 + \left\{ \lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x \left(u_s^0 \right) \right\} \left\langle \nabla_y \cdot \zeta_{kl} \right\rangle - \phi \nabla_x \cdot u_s^0 \end{cases} \tag{20}$$

avec, $\left\langle \rho \right\rangle = \rho_s (1-\phi) + \rho_f \phi \;\; ; \alpha = \phi Id - \left\langle \lambda^* \nabla_y \cdot \kappa_k + 2\mu^* \varepsilon_y (\kappa_k) \right\rangle ;$

$$i\omega \eta_f \left\langle u^0 \right\rangle = -K \left(\nabla_x p^0 - \rho_f \omega^2 u_s^0 \right) ;$$

$$\tilde{\sigma}_s^0 = \left\{ \lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x \left(u_s^0 \right) \right\} \left[Id + \lambda^* \nabla_y \cdot \zeta_{kl} + 2\mu^* \varepsilon_y \left(\zeta_{kl} \right) \right] ;$$

$$\beta = \left\langle \nabla_y \cdot \kappa_k \right\rangle .$$

Le comportement macroscopique recherché est en outre décrit par le système (20). La stratégie de l'implémentation numérique renferme trois étapes :

- a. Résoudre les trois problèmes de cellule par la méthode des éléments finis de référence ;
- b. Calculer la perméabilité effective et les propriétés élastiques effectives du milieu poreux ;
- c. Résoudre le problème macroscopique par une méthode itérative.

Figure 1 : *Géométrie périodique à simple porosité 2D*

3. Résultats et discussion

3-1. Équation fluide

Les ***Équations*** correspondant à la partie fluide seront simulées dans le maillage de la ***Figure 2***.

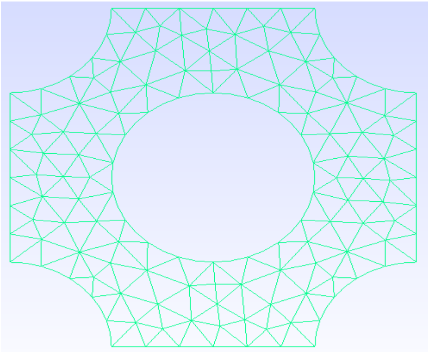


Figure 2 : *Maillage de la partie fluide*

Pour une fréquence égale à 10Hz, il y a les résultats suivants : On peut constater ainsi sur les ***Figures 3 et 4*** suivantes une dépression au niveau du solide. Ce phénomène est causé par l'incapacité du fluide de passer (on impose un déplacement nul à ce niveau) ; alors il s'écoule d'autant mieux qu'il est éloigné du matériau. D'ailleurs au niveau des vecteurs de déplacement représentés sur les ***Figures 3 et 4***, on obtient bien que celui-ci est quasi nul au niveau du solide.

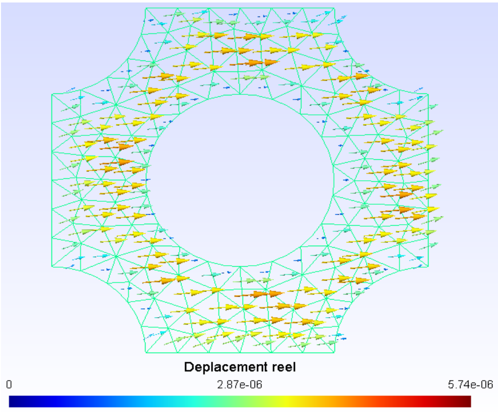


Figure 3 : *Déplacement relatif réel*

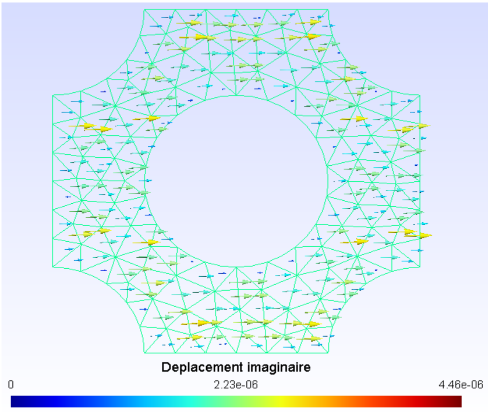


Figure 4 : *Déplacement relatif imaginaire*

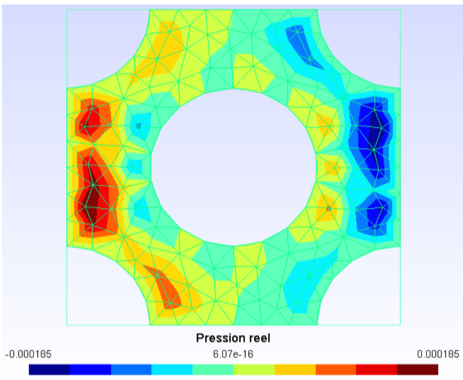


Figure 5 : *Pression réel*

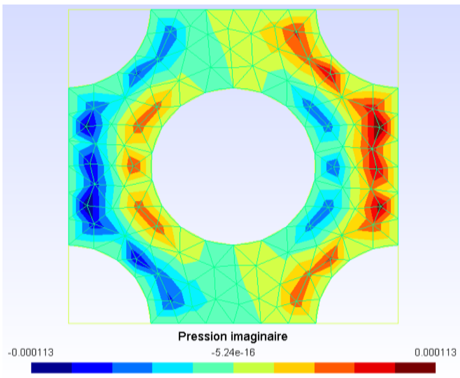


Figure 6 : *Pression imaginaire*

A partir de la définition de quantités moyennes sur le volume Ω , on obtient la perméabilité effective :

$$\langle k \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} k \, d\,\Omega \tag{21}$$

On observe sur la ***Figure 7 et 8*** que le déplacement relatif décroit en fonction de la fréquence. Même remarque concernant la perméabilité effective ***(Figures 9 et 10)***.

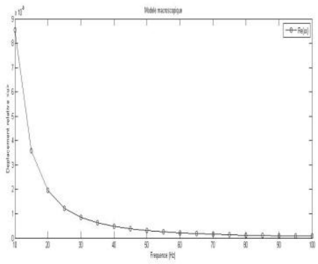


Figure 7 : *Partie réel du déplacement relatif*

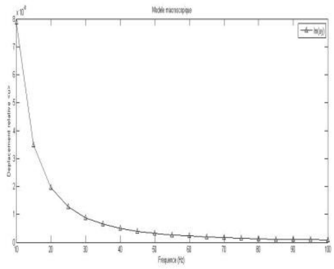


Figure 8 : *Partie imaginaire du déplacement relatif*

D'après la relation (7a), on a :

$$i\omega \eta_f u^0 = -k\left(\nabla p - \rho_f \omega^2 u_s^0\right)$$

Par prise de moyenne, on obtient le déplacement macroscopique $\langle u \rangle$:

$$i\omega \eta_f \left\langle u^0 \right\rangle = -\phi \left\langle k \right\rangle \left(\nabla p - \rho_f \omega^2 u_s^0\right) \tag{18}$$

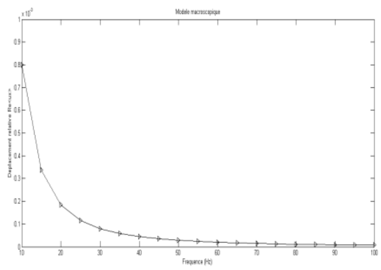


Figure 9 : *Perméabilité effective réel*

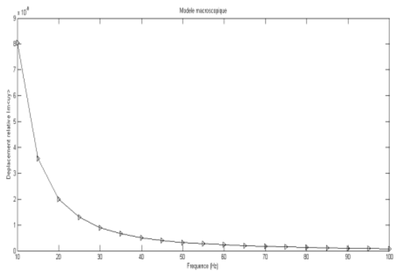
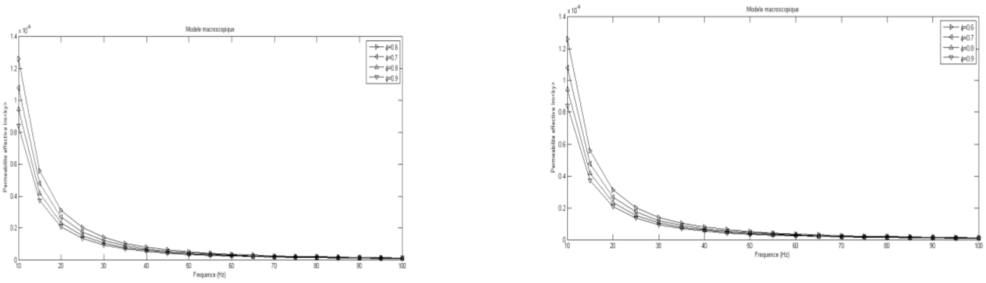


Figure 10 : *Perméabilité effective imaginaire*

Les ***Figures 11 et 12*** montrent le rôle de la porosité dans la propagation du son dans un milieu poreux. En effet lorsque la porosité augmente l'onde acoustique circule mieux.



a) Partie réel de la perméabilité effective

b) Partie imaginaire de la perméabilité effective

Figure 11 : *Perméabilité effective pour différentes valeurs de la porosité*

3-2. Équation solide

Le maillage dans lequel les équations correspondant à la partie solide sont représentées par la ***Figure 12***.

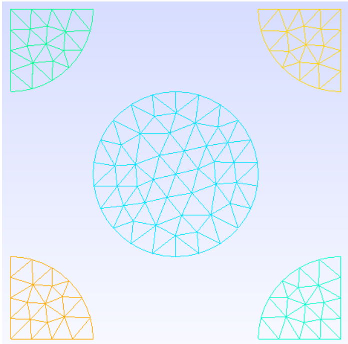


Figure 12 : *Maillage de la partie solide*

Deux cas sont à prendre :

1^er^ cas : Le déplacement solide κ_k est induit par la pression ($p^0 = 1$)

Le problème variationnel donnant κ s'écrit alors : $\int_{\Omega_s} \left(\lambda^* \nabla_y \cdot \kappa + 2\mu^* \varepsilon_y(\kappa)\right) \nabla_y \overline{w}\, d\Omega = \int_{\Omega_s} \nabla_y \overline{w}\, d\Omega$

Les ***Figures 13 et 14*** montrent que le déplacement de déroule en majorité dans un sens. Le champ de déformation (correction par rapport au gradient moyen) est montré pour une compression selon la direction $\vec{e_z}$.

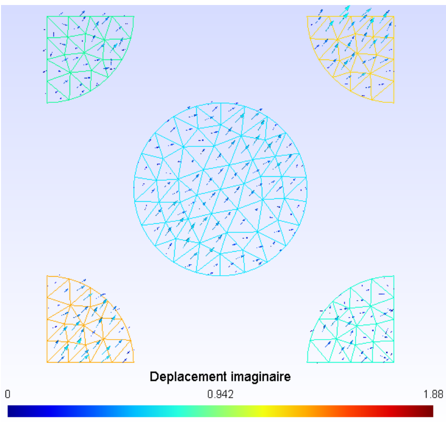


Figure 13 : *Déplacement solide* κ *imaginaire*

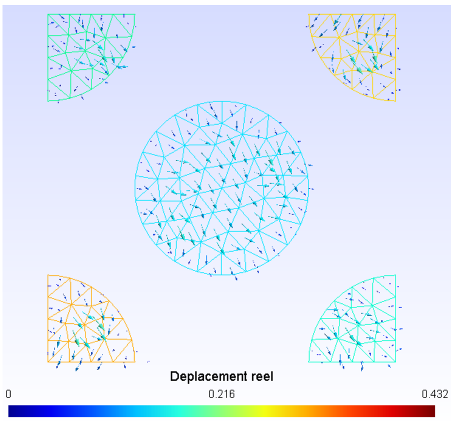


Figure 14 : *Déplacement solide* κ *réel*

2^e^ cas : Le déplacement solide ζ_{kl} est induit par la déformation macroscopique ($\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x(u_s^0) \neq 0$). Le problème variationnel donnant ζ s'écrit alors :

$$\int_{\Omega_s} \left[\lambda^* \nabla_y \cdot \zeta + 2\mu^* \varepsilon_y(\zeta)\right] \varepsilon_x(u_s^0) \nabla_y \overline{w}\, d\Omega = -\int_{\Omega_s} \left[\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x(u_s^0)\right] \nabla_y \overline{w}\, d\Omega$$

On observe que le déplacement solide réel est la même que dans le premier cas ***(Figure 15)***. Tandis que la partie imaginaire se fait par une traction et qui est maximum sur la surface ***(Figure 16)***.

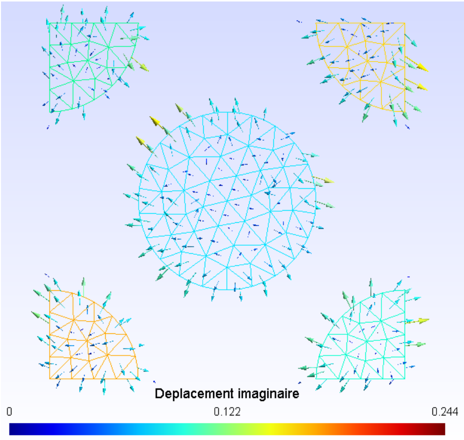


Figure 15 : *Déplacement solide ζ imaginaire*

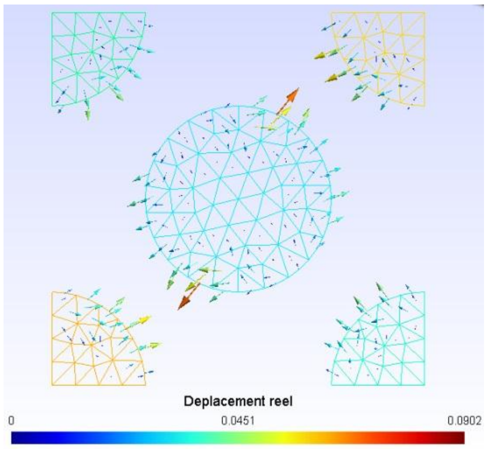


Figure 16 : *Déplacement solide ζ réel*

3-3. Modèle macroscopique

Le modèle macroscopique est le milieu équivalent au milieu poreux saturé, vu précédemment. Le problème variationnel donnant u_s^0 et p^0 s'écrit alors :

$$\langle \rho \rangle \omega^2 \int_\Omega u_s^0 \overline{w} \, d\Omega + \rho_f \omega^2 \int_\Omega \langle u^0 \rangle \overline{w} \, d\Omega = -\int_\Omega \nabla_x \cdot \langle \tilde{\sigma}_s^0 \rangle \overline{w} \, d\Omega + \int_\Omega \nabla_x \cdot \alpha \, p^0 \overline{w} \, d\Omega$$

Le maillage dans lequel ***l'Équation*** correspondant au modèle macroscopique est représentée par la ***Figure 17***. Le domaine de calcul correspondant est un carré de côté $C = 4 \cdot 10^{-2} m$ et la porosité de cette géométrie vaut $\phi = 0.3$. Le pas du maillage vaut $h = 0.2$.

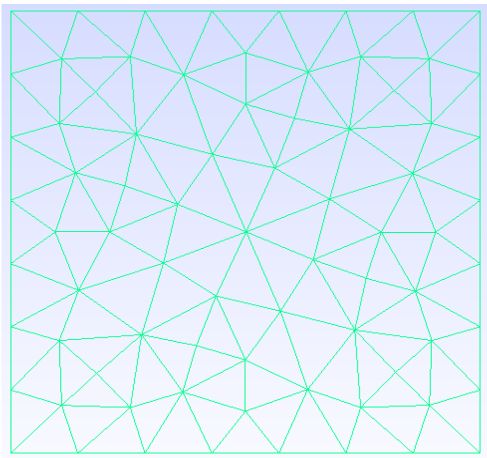


Figure 17 : *Maillage du domaine macroscopique*

L'écoulement se fait selon la direction $\overrightarrow{e_x}$, c'est-à-dire de gauche à droite dans le cadre de la ***Figure 18 et 19***, et on impose des conditions de périodicité entre les bords gauche et droit du domaine. On observe une légère augmentation du déplacement au milieu du carré.

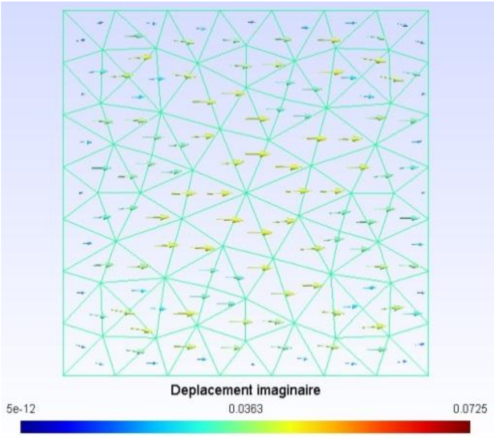


Figure 18 : *Déplacement solide* u_s^0 *réel*

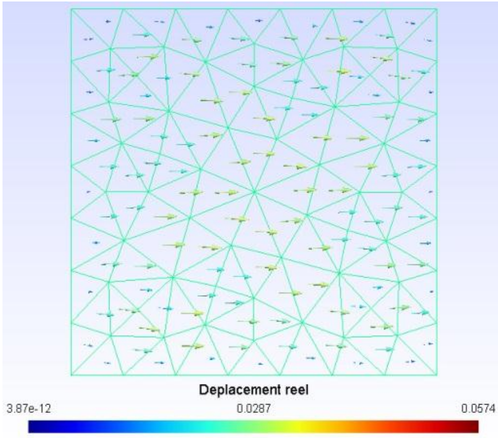


Figure 19 : *Déplacement solide* u_s^0 *imaginaire*

Sur la ***Figure 21***, la pression imaginaire débute avec une faible valeur. Après elle augmente progressivement. Et il y a l'événement contraire pour la pression réelle ***(Figure 20)***.

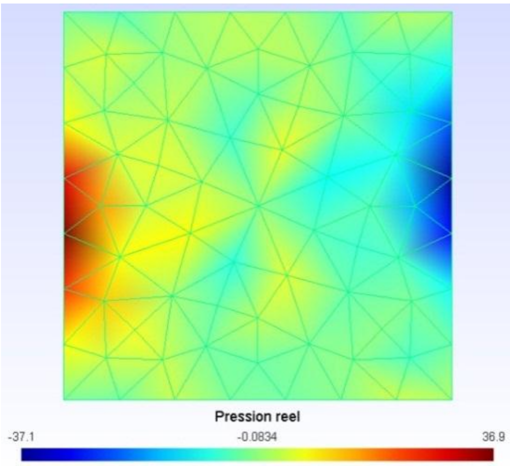


Figure 20 : *Pression réel*

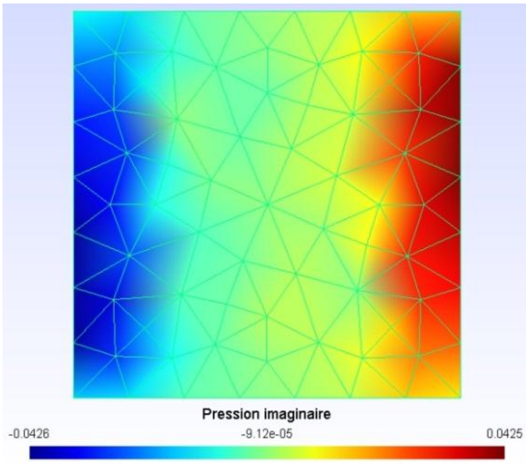
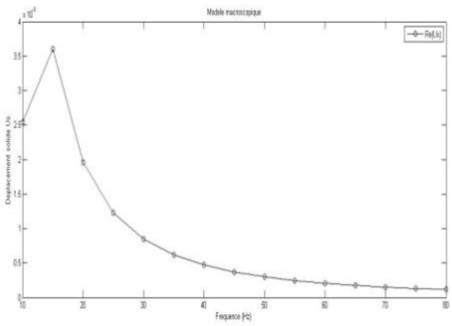
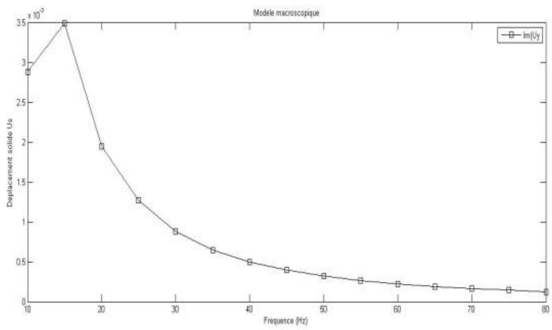


Figure 21 : *Pression imaginaire*

La ***Figure 22*** montre que le déplacement solide u_s^0 diminue lorsque la fréquence augmente. On observe une légère augmentation du déplacement pour une fréquence égale à 20 Hz cela est dû au squelette qui est déformable.



a) Deplacement solide reel



b) Deplacement solide imaginaire

Figure 22 : *Déplacement solide* u_s^0 *en fonction de la fréquence*

4. Conclusion

Dans cet article nous avons étudié la modélisation et simulation numérique de la propagation du son dans un milieu poreux flexible saturé par un fluide incompressible. La déformation dans le milieu solide est décrite par la loi de Hooke linéaire avec prise en compte de l'amortissement structurel du squelette. La méthode d'homogénéisation de structure périodique appliquée aux équations fluide-structure à l'échelle microscopique a permis de déduire le comportement effectif équivalent à l'échelle macroscopique. On a confronté le modèle que nous avons obtenu avec le modèle de Biot-Allard actuellement utilisé par les physiciens et industriels pour étudier les problèmes couplés fluide-structure. Ce modèle de Biot-Allard a été établi de manière empirique et est très satisfaisant dans le cas des basses fréquences et des hautes fréquences. La simulation numérique a été faite par la méthode des éléments finis de référence par l'algorithme d'Uzawa. Il est faisable ultérieurement d'augmenter la complexité de cette étude en prenant une géométrie à double porosité.

Références

[1] - DENIS LAFARGE, Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide visco-thermique : (définition de paramètres géométriques analogie électromagnétiques temps de relaxation), (1993)

[2] - SYLVAIN BERGER, Contribution à la caractérisation du milieu poreux par des methods acoustiques : estimations des paramètres physiques, (2004)

[3] - NAVID NEMATI, Macroscopic theory of sound propagation in rigid-framed porous materials allowing for spatial dispersion : Principle and validation, (2012)

[4] - STEPHANE GASSER, Etude des propriétés acoustiques et mécanique d'un matériau métallique poreux. Modèle à base de sphère creuse de nickel, (2003)

[5] - AMELIE RENAULT, Caractérisation mécanique dynamique de matériaux poro-visco-élastique, (2008)

[6] - OLIVIER DOUTRES, Caractérisation mécanique de matériaux fibreux en vibro-acoustique, (2007)

[7] - MINH TAN HOANG, Modélisation et Simulation Multi-Echelle et Multi-Physique du Comportement Acoustique de Milieux Poro-Elastiques : Application aux Mousses de Faible Densité, (2012)

[8] - CHARLES PEYREGA, DOMINIQUE JEULINA, Estimation of acoustic properties and of the representative volume element of random fibrous media, (2013)

[9] - A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, Asymptotic Analysis for periodic structures, (1978)

[10] - I. MALINOUSKAYA, « Propriétés acoustiques des milieux poreux secs et saturés », (2007)

[11] - NAVID NEMATI, ANSHUMAN KUMAR, DENIS LAFARGE, NICHOLAS X. FANG, « Non local description of sound propagation through an array of Helmholtz resonators », (2015)

[12] - RUSTEM R. GADYL'SHIN, « On scattering frequencies in homogenization problems.Critical cases », C. R. Mecanique, 344 (2016) 181 - 189

[13] - GILLES A. FRANCFORT, Antoine Gloria, « Isotropy prohibits the loss of strong ellipticity through homogenization in linear elasticity », C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 354 (2016) 1139 - 1144

[14] - MOJTABA IZADMEHR, MAHDI ABBASI, MEHRSHAD MANSOURI, ALIREZA KAZEMI, ALI NAKHAEE, AMIN DARYASAFAR, « Accurate analytical model for determination of effective diffusion coefficient of polymer electrolyte fuel cells by designing compact Loschmidt cells », Fuel, 199 (2017) 551 - 561

[15] - EDUARD ROHAN, SALAH NAILI, VU-HIEU NGUYEN, « Wave propagation in a strongly heterogeneous elastic porous medium : Homogenization of Biot medium with double porosities », C. R. Mecanique, 344 (2016) 569 - 581