

Simulation de l'infiltration des eaux usées à travers une microstructure saturée

Aro Pascal RATSIMBAZAFY^{1*}, José Marie Michel ANDRIAMAMPIANINA²,
Adolphe Andriamanga RATIARISON¹ et Alain Jean de Dieu RAVOLANIRINA¹

¹ Université d'Antananarivo, Faculté des Sciences, Laboratoire de Dynamique de l'Atmosphère du
Climat et des Océans, Madagascar

² Institut Supérieur de Technologie d'Antananarivo, Madagascar

* Correspondance, courriel : ratsimbazafy.aro@gmail.com

Résumé

Ce travail consiste à étudier l'infiltration de l'eau usée à travers une microstructure saturée. Ce concept nécessite l'utilisation de la méthode d'homogénéisation de structure périodique sur les équations de Navier-Stokes correspondant à l'échelle microscopique, pour déterminer la propriété effective du milieu équivalent à l'échelle macroscopique. Après l'obtention d'un modèle numérique, des simulations sont faites avec des vitesses initiales différentes, afin de voir son impact sur l'écoulement.

Mots-clés : *infiltration, milieu poreux, développement asymptotique, élément fini.*

Abstract

Simulation of wastewater infiltration through a saturated microstructure

This work consists studying the infiltration of waste water through a saturated microstructure. This concept requires the use of the method of homogenization of the periodic structure on the Navier-Stokes equations corresponding to the microscopic scale, to determine the effective property of the equivalent structure on a macroscopic scale. After obtaining a numerical model, simulations are made with different initial speeds, in order to see its impact on the flow.

Keywords : *infiltration, porous medium, asymptotic development, finite element.*

Nomenclature

ϕ	: Porosité
$\delta_{\alpha\beta}$	: Symbole de Kronecker
v	: Vitesse à l'échelle microscopique en $[m.s^{-1}]$
$\mathbf{v}$	: Vitesse à l'échelle macroscopique en $[m.s^{-1}]$
p	: Pression en $[N.m^{-2}]$
ρ	: Masse volumique en $[kg.m^{-3}]$

t	: Temps en [s]
μ	: Viscosité dynamique de l'eau en $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]$
Ω_f	: Domaine fluide
Γ	: Interface solide-fluide
ε	: Séparateur d'échelle (microscopique et macroscopique)
x	: Variable macroscopique
y	: Variable microscopique
$\underline{\underline{K}}$	: Tenseur de conductivité hydraulique du milieu poreux
ψ	: Fonction test
φ	: Fonction test
g	: intensité de la pesanteur en $[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$

1. Introduction

L'observation à l'échelle microscopique permet de qualifier les objets comme étant un milieu poreux. Cette existence de pores permet aux eaux usées avoisinant de s'y infiltrer. Plusieurs recherches [1 - 5] sont focalisées sur l'étude de ces eaux à travers divers milieux. En se référant à l'échelle microscopique, il est possible d'apercevoir les hétérogénéités présentes et de considérer ces conduits comme étant un milieu poreux, périodique et rigide. En partant de cette échelle, la méthode d'homogénéisation de structure périodique permet d'obtenir les propriétés effectives correspondantes à l'échelle macroscopique. L'utilisation de cette méthode a débuté en 1978 [6, 7] et ne cesse d'être employée dans l'étude de divers structures et domaines [8 - 12]. Dans ce travail, elle est appliquée aux équations de Navier-Stokes. Ces équations sont ensuite résolues numériquement en utilisant l'algorithme d'Uzawa et par le logiciel MATLAB. Le logiciel GMSH a servi au maillage du volume élémentaire représentatif, puis à l'affichage de certaines figures obtenues lors de la résolution numérique. Les objectifs de ce travail sont : mettre en évidence l'impact de la variation de la vitesse initiale sur l'écoulement, montrer l'évolution de la vitesse suivant le changement du gradient de pression, ainsi que de déterminer la propriété effective du milieu équivalent à l'échelle macroscopique.

2. Méthodologie

2-1. Équations à considérer

L'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux rigide et saturé répond aux **Équations** de Navier-Stokes pour un écoulement très lent. Il correspond à un système **d'Équations** constitué par la conservation de la quantité de mouvement donnée par **l'Équation (i) de (1)**, puis du bilan de masse énoncé par **l'Équation (2)**. Après normalisation, il vient :

$$\begin{cases}
 \rho \frac{\partial}{\partial t}(v) = -\nabla p \delta_{\alpha\beta} + \mu \varepsilon^2 \Delta v & \text{sur } \Omega_f & (i) \\
 \nabla \cdot v = 0 & \text{sur } \Omega_f & (ii) \\
 v = 0 & \text{sur } \Gamma & (iii)
 \end{cases} \quad (1)$$

2-2. Homogénéisation des équations

Il existe d'autres méthodes d'homogénéisations [13]. Celle correspondant à une structure finement périodique repose sur la technique des développements asymptotiques, faisant une séparation d'échelles : microscopique et macroscopique en considérant le changement d'échelle $\left(y = \frac{x}{\varepsilon}\right)$. L'application des développements asymptotiques sur les **Équations de (1)** donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho^0 + \varepsilon \rho^1) \frac{\partial}{\partial t} (v^0 + \varepsilon v^1) = - \left(\nabla_x + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \right) (p^0 + \varepsilon p^1) + \\ \varepsilon^2 \left[\mu \left(\Delta_x + \frac{2}{\varepsilon} \Delta_{xy} + \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_y \right) (v^0 + \varepsilon v^1) \right] \end{array} \right. \quad (i) \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\nabla_x + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \right) \cdot (v^0 + \varepsilon v^1 + \dots) = 0 \end{array} \right. \quad (ii)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v^0 + \varepsilon v^1 + \varepsilon^2 v^2 + \dots = 0 \end{array} \right. \quad (iii)$$

La viscosité dynamique μ n'est pas affectée par le développement asymptotique car il s'agit d'une constante. Le regroupement des termes des **Équations (i-iii) de (2)** portant le même ordre de ε conduit :

- A l'ordre ε^{-1} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_y p^0 = 0 \\ \nabla_y \cdot v^0 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (i) \\ (ii) \end{array} \quad (3)$$

- A l'ordre ε^0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^0 \frac{\partial}{\partial t} (v^0) = - \nabla_y p^1 - \nabla_x p^0 + \mu \Delta_y v^0 \\ \nabla_x \cdot v^0 + \nabla_y \cdot v^1 = 0 \\ v^0 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{array} \quad (4)$$

2-3. Problème de cellule

A l'ordre ε^{-1} , **l'Équation (i) de (3)** permet d'affirmer que la pression initiale ne dépend que de x , c'est-à-dire de l'échelle macroscopique.

$$p^0(x, y) = p^0(x) \quad (5)$$

A l'ordre ε^0 , **l'Équation (i) de (4)** montre que la vitesse initiale, ainsi que la pression sont tous deux fonctions du temps et ne dépendent que de l'échelle macroscopique. C'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} v^0 = v^0(x, t) \\ p^1 = p^1(x, t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (i) \\ (ii) \end{array} \quad (6)$$

Par linéarité, l'Équation (i) de (4) permet d'écrire :

$$\begin{cases} v^0 = -\frac{k(y, t)}{\mu} \nabla_x p^0 & (i) \\ p^1 = -\pi(y, t) \nabla_x p^0 + p^1(x) & (ii) \end{cases} \quad (7)$$

Comme le gradient d'un scalaire donne un vecteur, il est possible d'écrire :

$$-\nabla_x p^0 = \delta_{ij} e_j \quad (8)$$

Le tenseur k_{ij} et le vecteur $\pi(x, y)$ sont des solutions du problème de cellule dans les Équations (i-iii) de (9) :

$$\begin{cases} \frac{\rho^0}{\mu} \frac{\partial k}{\partial t} + \Delta_y k - \nabla_y \pi = -I & (i) \\ \nabla \cdot k = 0 & (ii) \\ k = 0 & (iii) \end{cases} \quad (9)$$

2-4. Formulation variationnelle

En appliquant la formulation variationnelle aux Équations (i-iii) de (4), il vient :

$$\begin{cases} \frac{\rho^0}{\mu} \int_{\Omega} v_{n+1}^0 \psi \, d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \nabla_y v_{n+1}^0 \nabla_y \psi \, d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} p^1 \nabla_y \cdot \psi \, d\Omega = \int_{\Omega} \psi \, d\Omega + \frac{\rho^0}{\mu} \int_{\Omega} v_n^0 \psi \, d\Omega & (i) \\ \int_{\Omega} v_{n+1}^0 \nabla_y \psi \, d\Omega = 0 & (ii) \\ v = 0 \quad \text{sur } \Gamma & (iii) \end{cases} \quad (10)$$

2-5. Écriture matricielle

Dans une étude en deux dimensions (2D), les Équations (i-iii) de (10) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ {}^t B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

avec,

$$\begin{cases} A_{ij} = \left(\Delta t \int_{\Omega_f} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\Omega \right)_{1 \leq i, j \leq 3} + \frac{\rho^0}{\mu} \left(\int_{\Omega_f} \varphi_i \cdot \varphi_j \, d\Omega \right)_{1 \leq i, j \leq 3} & (i) \\ B_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i \nabla_y \cdot \varphi_j \, d\Omega & (ii) \end{cases} \quad (12)$$

Dans cette écriture matricielle, A est la constituée de la somme de la matrice de rigidité et de la matrice de masse. Et B est la matrice divergence.

2-6. Résolution numérique

Comme dans de nombreux ouvrages [14], la résolution s'effectue avec le logiciel MATLAB. Les solutions sont ensuite représentées à l'aide du logiciel GMSH. La **Figure 1** représente le Volume Élémentaire Représentatif (VER) du milieu poreux périodique considéré après maillage effectué à partir du logiciel GMSH. Les points 1 à 10 sont les nœuds à partir desquels des normes des vitesses vont être comparées. Les numéros 3 et 8 ne représentent qu'un seul nœud.

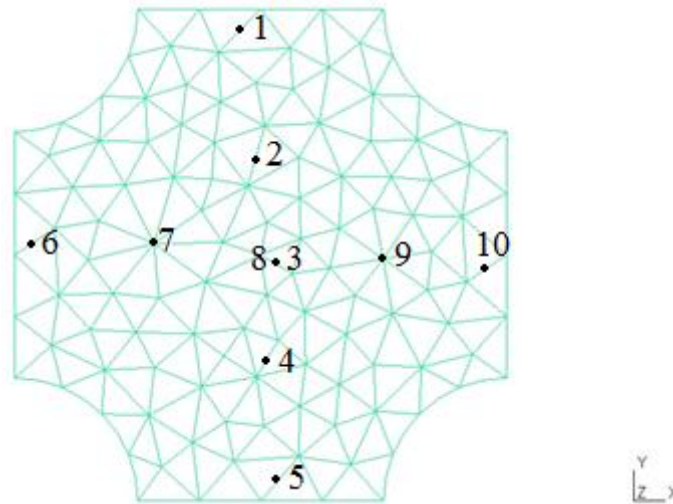


Figure 1 : Schéma du maillage du modèle

Paramètres correspondants au fluide :

- *viscosité dynamique* : $1,03 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$
- *masse volumique* : $1 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- $v(x;0) = v_0(x)$ donnée de l'ordre de 10^{-6} (à gauche), puis de 10^{-5} (à droite) pour les **Figures 1 à 4**. Puis, de l'ordre de 10^{-6} pour toute la suite.

3. Résultats et discussion

Le milieu poreux est constitué par la combinaison de plusieurs volumes élémentaires représentatifs. Cette répétition engendre une périodicité des conditions initiales : à l'entrée et à la sortie. La **Figure 2** montre que malgré la variation de la vitesse du fluide, les écoulements obtenus sont laminaires. Dans la partie gauche où la vitesse initiale est plus faible, le fluide en écoulement épouse bien la forme du VER. Les parties ascendante et descendante sont discernables. Par contre, pour l'écoulement avec une vitesse initiale plus élevée que la première, le déplacement du fluide tend à être plus rapide et de direction horizontale à travers le VER. Donc, l'augmentation de la vitesse initiale tend à rendre l'écoulement unidirectionnel : celui de la vitesse initiale.

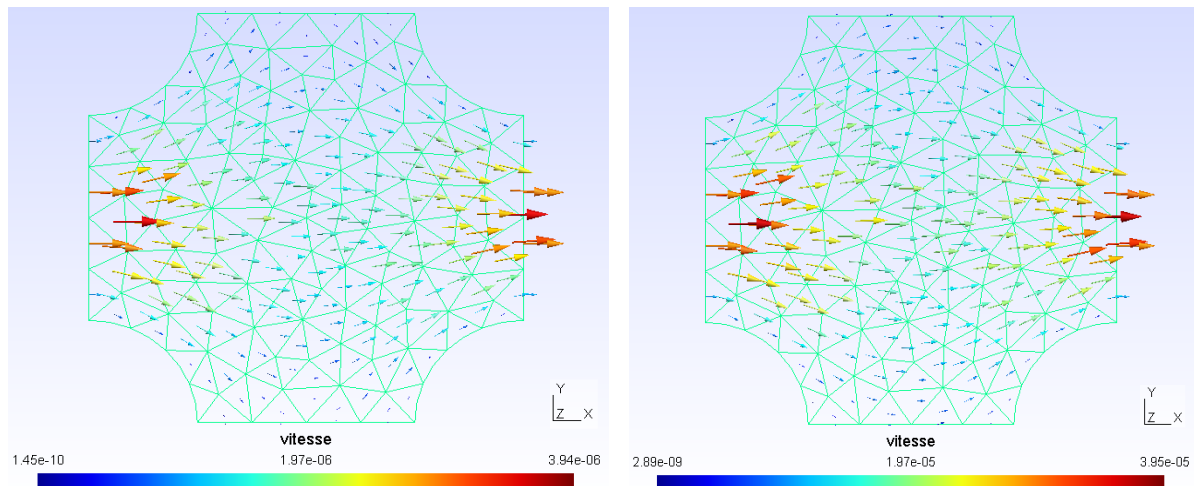


Figure 2 : *Comparaison des vecteurs-vitesses*

Dans la **Figure 3**, à gauche, non seulement que la vitesse moyenne est inférieure, mais en plus, une grande partie du fluide située sur les extrémités supérieure et inférieure sont inertes. Par contre, à droite, même la partie du fluide située au voisinage de ces extrémités sont en mouvement. Cette comparaison des normes permet également d'apercevoir l'adhésion du fluide sur la paroi. En effet, l'eau qui se trouve à l'interface fluide-paroi (de couleur bleue foncée) est inerte à cause de la tension superficielle. Mais ce qui est le même pour les deux représentations est que la vitesse initiale qui est celle située à l'entrée et à la sortie du VER représente la vitesse maximale de l'écoulement.

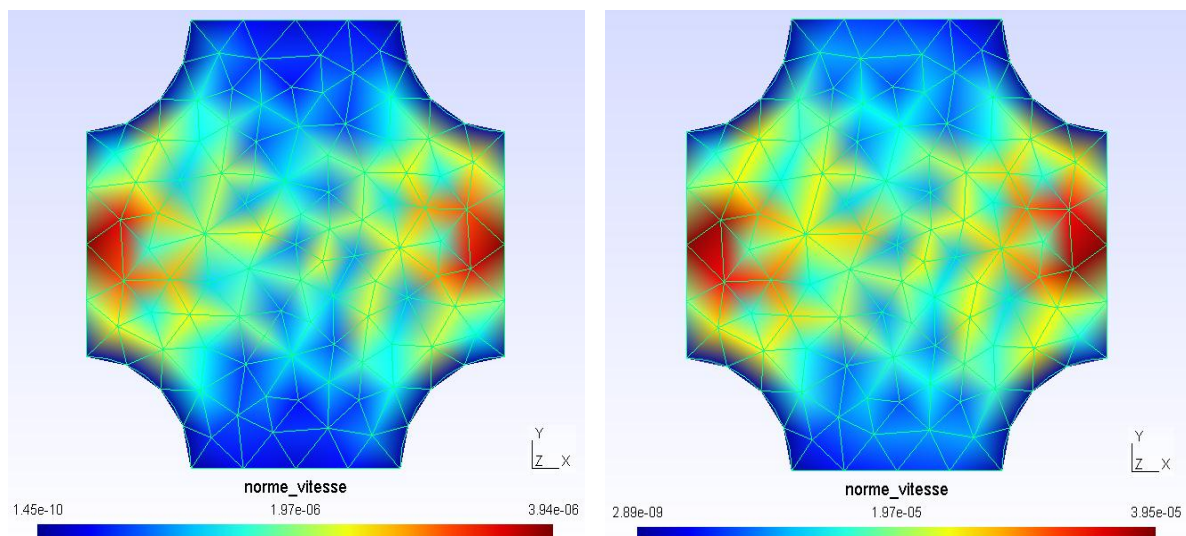


Figure 3 : *Comparaison des normes des vecteurs-vitesses*

La **Figure 4** exprime la diminution de la pression, de l'entrée à la sortie du VER. Mais, étant donné la périodicité du milieu, la sortie d'un VER devient l'entrée d'un autre. Par conséquent, sa norme est la même en ces deux côtés. La variation de la pression s'effectue donc suivant l'abscisse (x), et les points ayant la même ordonnée (y) présentent pratiquement la même pression. Pour les points alignés avec les nœuds 1 à 5, la valeur de la pression est voisine de celle de la moyenne.

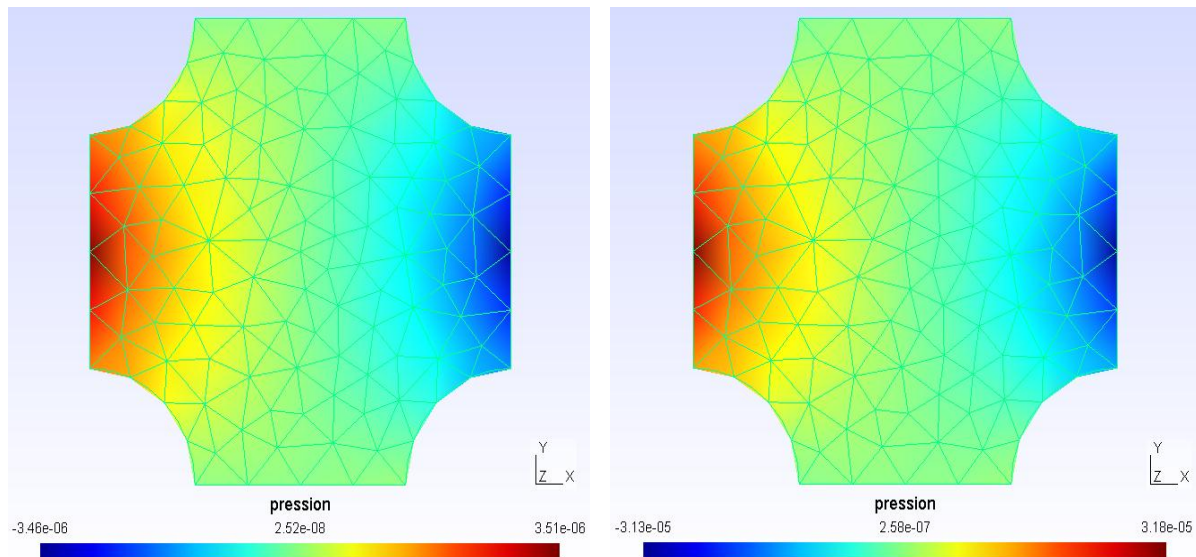


Figure 4 : Comparaison des pressions

La **Figure 5** signifie que le gradient de la pression augmente, puis atteint sa valeur maximale au centre du VER (au nœud 3), et diminue jusqu'à atteindre sa valeur initiale à la sortie. Ce mode de variation est également dû à la périodicité du milieu. Mais ce sont les points alignés horizontalement avec la vitesse initiale qui sont les plus influencés par ce gradient de pression. Il est minimal au niveau des deux extrémités supérieure et inférieure car ces zones ne sont pas situées dans la direction de la vitesse initiale ; alors, elle y a moins d'influence.

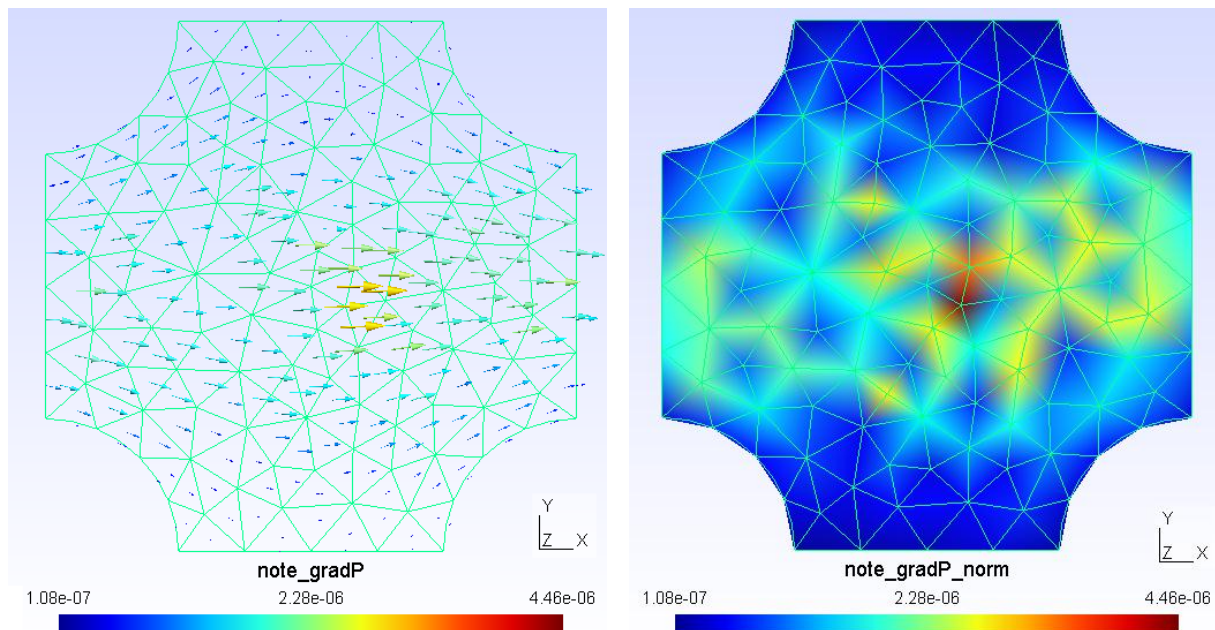


Figure 5 : Gradient de la pression et norme du gradient de la pression

Ces deux représentations dans la **Figure 6** montrent que la vitesse et le gradient de la pression n'évoluent pas de la même manière. Néanmoins, en un point quelconque du VER, ils ont le même sens. Cette égalité d'orientation justifie le fait que c'est la variation du gradient de pression qui commande l'écoulement du fluide.

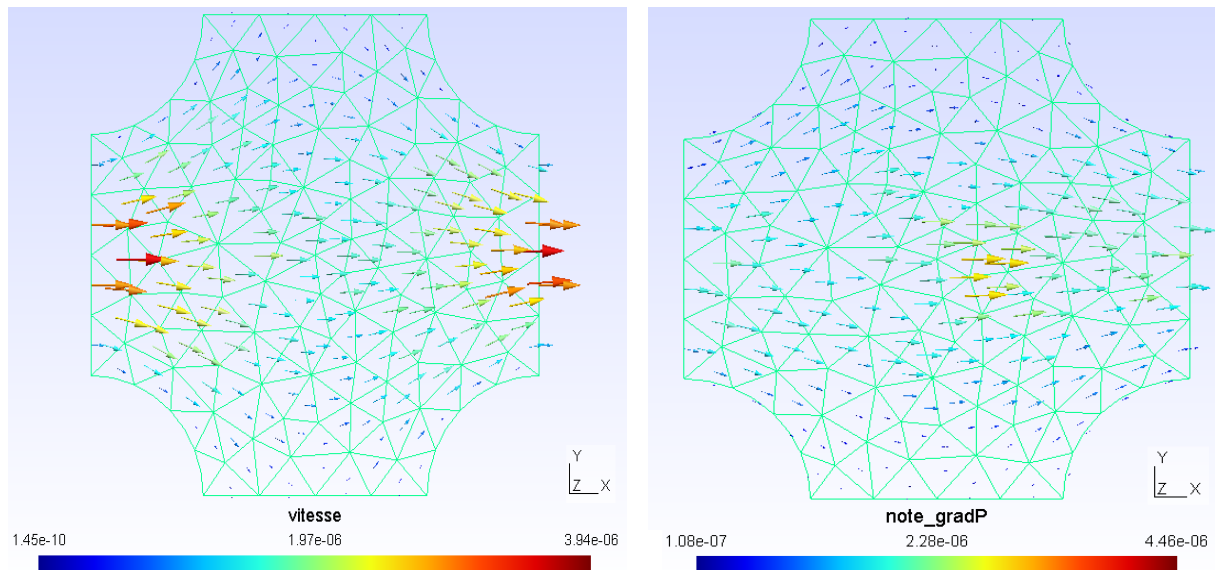


Figure 6 : Comparaison de la vitesse et du gradient de la pression

La **Figure 7** montre que le long de l'écoulement, la vitesse est inversement proportionnelle au gradient de pression. En effet, la valeur de la vitesse qui est maximale (vitesse initiale) à l'entrée décroît jusqu'au centre, puis augmente en direction à la sortie où elle regagne sa valeur maximale. C'est tout à fait le contraire pour la pression. Mais leurs caractéristiques communes sont que leurs valeurs au niveau des extrémités supérieur et inférieur sont minimales, malgré leurs différences. Ce phénomène entre la vitesse et le gradient de pression est vérifié par **l'Équation** de Bernoulli pour un écoulement très lent ($\rho g h$ est négligeable) :

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = C^t \quad (13)$$

Dans cette **Équation (13)**, C^t est une constante.

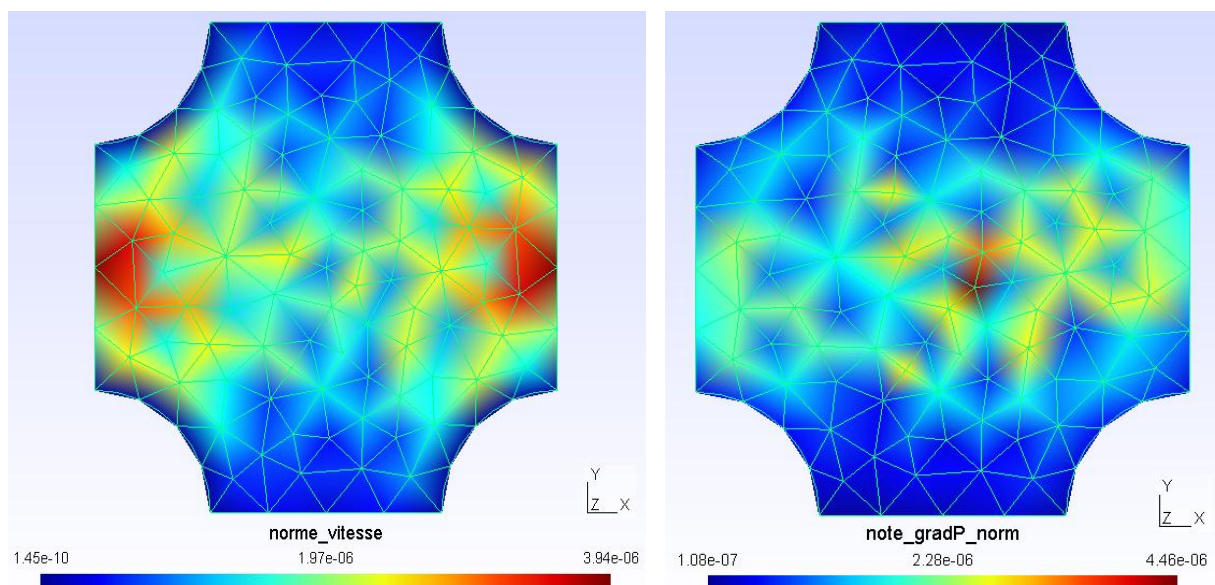


Figure 7 : Comparaison des normes de la vitesse et du gradient de la pression

La **Figure 8** représente la comparaison des points 1 à 5 appartenant à la direction verticale. L'écoulement est plus fort au milieu du VER (relatif au point 3), puis il diminue progressivement en se dirigeant vers les deux côtés 1 et 5. Cette situation est due à la distance que fait chaque point avec la vitesse initiale. Mais les points équidistants du centre 2 et 4 ont la même vitesse ; il en est de même pour les points 1 et 5. De plus, toutes ces vitesses augmentent linéairement avec le temps.

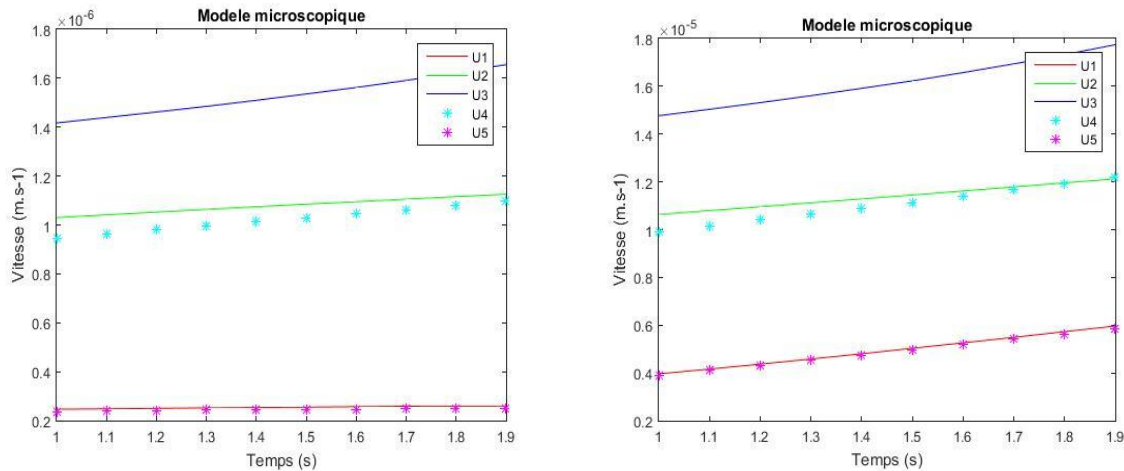


Figure 8 : Comparaison des vitesses de 05 points alignés suivant (Oy)

Dans la **Figure 9**, toutes les vitesses croissent également avec le temps. Mais contrairement au déplacement vertical, la vitesse d'écoulement est minimale au centre du VER (point 3), puis augmente en se rapprochant des deux extrémités (points 6 et 10) où le domaine d'écoulement est plus étroit.

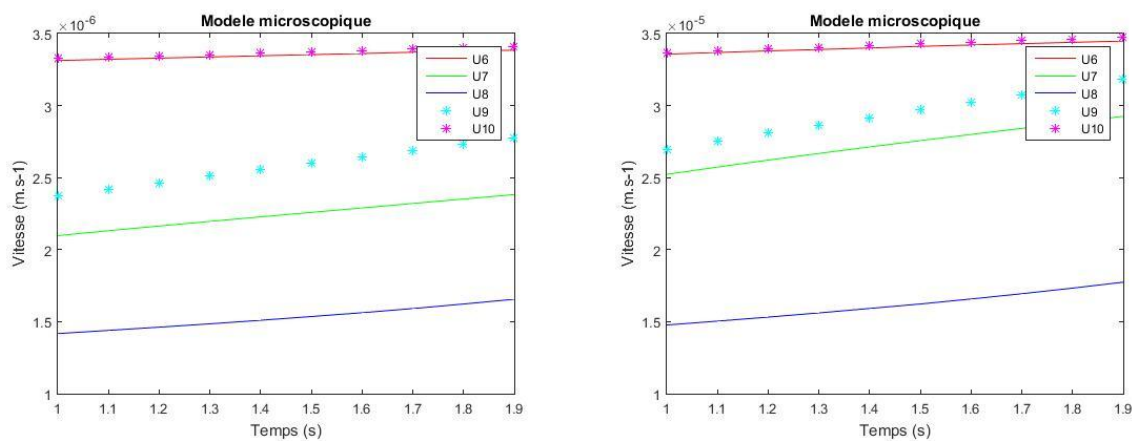


Figure 9 : Comparaison des vitesses de 05 points alignés suivant (Ox)

Pour la **Figure 10**, à gauche, il y a la variation de la vitesse en partant du point 6 puis en se dirigeant vers 10, tout en considérant plus de valeurs correspondant à plus de nœuds. A partir de valeur maximale 5 (vitesse initiale), elle décroît jusqu'au milieu du VER (point 3). Ensuite, elle augmente jusqu'à atteindre sa valeur initiale à l'autre bout (vitesse de sortie). Elle confirme ce qui a été affirmé avec la **Figure 9**. Puis, à droite, elle montre son accroissement en partant de l'extrémité supérieure (point 1) jusqu'au milieu du VER (point 3), suivi de sa diminution jusqu'au niveau inférieur (point 5). Cette courbe est obtenue avec la prise en compte de plus de points, et certifie ce qui a été affirmé avec la **Figure 8**.

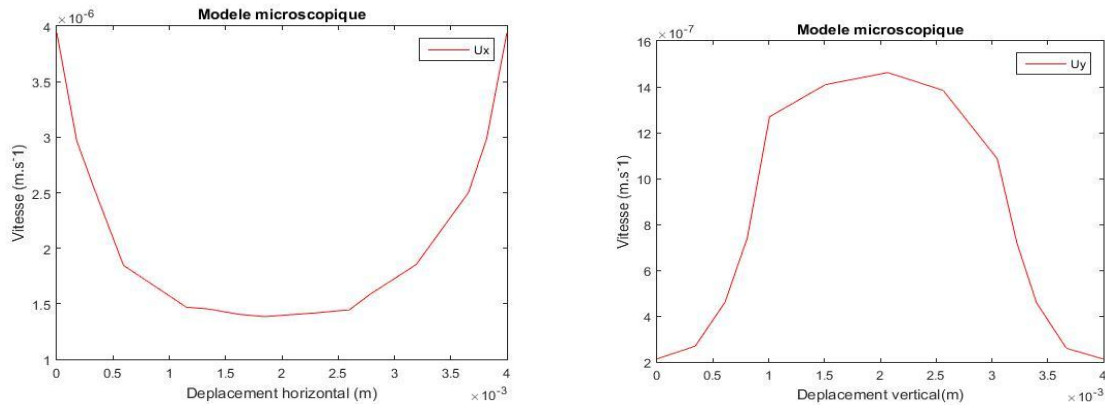


Figure 10 : Comparaison de l'évolution de la vitesse suivant la verticale (Oy) et l'horizontale (Ox)

Toutes les **Figures 2 à 10** mettent en exergue que l'écoulement est symétrique par rapport à un axe horizontal qui passe par le milieu du VER. Cette étude à l'échelle microscopique permet d'obtenir la propriété effective du milieu considéré au niveau macroscopique :

$$\mathbf{v} = -\phi \frac{K}{\mu} \nabla_x p^0(x) \quad (14)$$

Cette **Équation (14)** n'est autre que la loi de Darcy. Cette vitesse macroscopique $\mathbf{v}$ est inférieure à la vitesse du fluide à l'échelle du pore. La relation permet de déterminer la conductivité hydraulique du milieu. Pour un milieu supposé isotrope, le tenseur $\overline{K}$ s'écrit :

$$\overline{K} = \begin{pmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{pmatrix} \quad (15)$$

avec, $K_{xx} = \langle k_x \rangle = 1.153 \text{e-}09$ et $K_{yy} = \langle k_y \rangle = 1.518 \text{e-}11$

Les termes k_x et k_y sont obtenus à partir de **l'Équation (i) de (7)**. La variation de la porosité dans **l'Équation (14)** suffit pour obtenir différentes vitesses macroscopiques $\mathbf{v}$. Cette existence de pores peut également engendrer d'autres phénomènes pouvant recycler l'eau usée : soit à partir de leurs dimensions, soit grâce à la propriété d'adsorption de la paroi [15].

4. Conclusion

L'échelle microscopique a permis d'apercevoir l'allure d'écoulement de l'eau à travers les pores. Puis, elle met en exergue la variation en norme et en sens de la vitesse qui n'est pas la même suivant l'horizontale et la verticale. Néanmoins, il y a les mêmes résultats sur les extrémités supérieure et inférieure, puis à l'entrée et à la sortie du VER. Il en est de même pour la pression, ainsi que son gradient. Puis, la variation de la vitesse initiale génère également des changements sur ces derniers. Ensuite, elle a mené à l'obtention : du lien entre la vitesse et le gradient de pression, mais aussi de la propriété effective équivalente à l'échelle macroscopique (conductivité hydraulique). A cette échelle, le nouveau variable remplaçant la vitesse initiale est la porosité. Ainsi, la discrétisation par élément fini, l'algorithme d'Uzawa, les logiciels GMSH et MATLAB peuvent donc concorder lors de la résolution de ce type de problème.

Références

- [1] - JEROME DE BENEDITTIS, « Mesurage de l'infiltration et de l'exfiltration dans les réseaux d'assainissement », (2004)
- [2] - CHRISTELLE DERE, « Mobilité et redistribution à long terme des éléments traces métalliques exogènes dans les sols : Application à des luvisols pollués par 100 ans d'épandage d'eaux usées brutes dans la plaine de Pierrelaye », (2006)
- [3] - KONE DIALLO MARTINE, « Infiltration-percolation sur sable et sur fibres de coco, filtres plantes et épuration d'eaux usées domestiques à dominance agroalimentaire sous climat tropical sec : cas des eaux résiduaires urbaines de Ouagadougou, Burkina Faso », (2011)
- [4] - ABA AAKI, « Elimination des métaux lourds (Cd, Pb, Cr, Zn et As) des eaux usées industrielles et naturelles par le procédé d'infiltration-percolation », (2012)
- [5] - NAMBATINGAR NGARAM, « Contribution à l'étude analytique des polluants (en particulier de type métaux lourds) dans les eaux du fleuve Chari lors de sa traversée de la ville de N'Djamena », (2015)
- [6] - A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, « Asymptotic Analysis for periodic structures », (1978)
- [7] - E. SANCHEZ-PALENCIA, « Homogenization in mechanics a survey of solved and open problems », (1980)
- [8] - JEREMY TOSCANO, « Contribution à l'homogénéisation des structures périodiques unidimensionnelles : application en biomécanique à la structure axonémale du flagelle et des cils vibratiles », (2010)
- [9] - TRI DAT NGO, « Mise à l'échelle d'un modèle d'écoulement diphasique avec gravité dans un milieu géologique hétérogène : Application au cas de la séquestration du CO₂ », (2016)
- [10] - ALEXANDRE ILTCHEV, « Homogénéisation périodique d'un matériau cellulaire en élasto-plasticité et application au calcul de structures : des petites aux grandes déformations », (2015)
- [11] - ABDELGHANI MATINE and al., « Modélisation par homogénéisation des transferts de chaleur dans des structures composites avec prise en compte des effets de bords », (2013)
- [12] - ALEXANDRE ILTCHEV and al., « Homogénéisation périodique d'un matériau élasto-plastique compressible anisotrope : application aux structures sandwichs à cœur cellulaire », (2013)
- [13] - TRUNG KIEN NGUYEN, « Homogénéisation numérique de structures périodiques par transformée de Fourier : matériaux composites et milieux poreux », (2011)
- [14] - NAHLA MANSOURI, « Modèles équationnels et numériques des écoulements non-saturés et partiellement saturés », (2016)
- [15] - CAROLE DELMAS-GADRAS, « Influence des conditions physico-chimiques sur la mobilité du plomb et du zinc dans un sol et un sédiment en domaine routier », (2000)